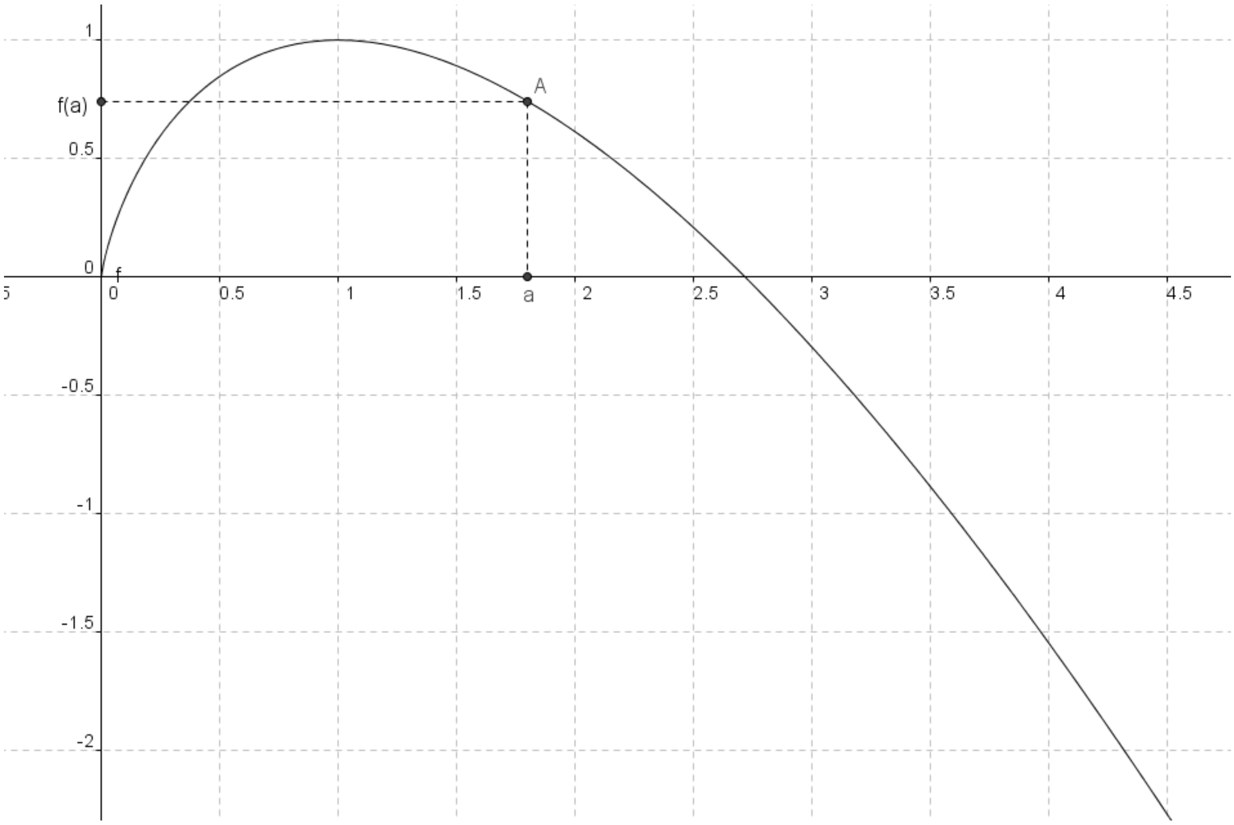
France Métropolitaine

1. Exercice 1 (6 points)

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x(1-\ln x)$.

La courbe représentative C de la fonction *f* est donnée ci-dessous.



Partie I : Étude de la fonction *f*

1. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel *x*.

2. Déterminer les limites de la fonction *f* aux bornes de son ensemble de définition.

3. Déterminer la dérivée de la fonction *f* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction *f* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

4. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_A) au point A de la courbe C d'abscisse a.

a. Déterminer, en fonction du nombre réel a, les coordonnées du point A_0, point d'intersection de la droite (T_A) et de l'axe des ordonnées.

b. Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_A). Construire la tangente (T_A) au point A placé sur la figure.

Partie II : Un calcul d'aire

Soit a un nombre réel strictement positif. On note A(a) la mesure, en unité d'aire, de l'aire de la région du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = e$.

1. Justifier que $A(a)=\int_a^e f(x)\,dx$, en distinguant le cas $a < e$ et le cas $a > e$.

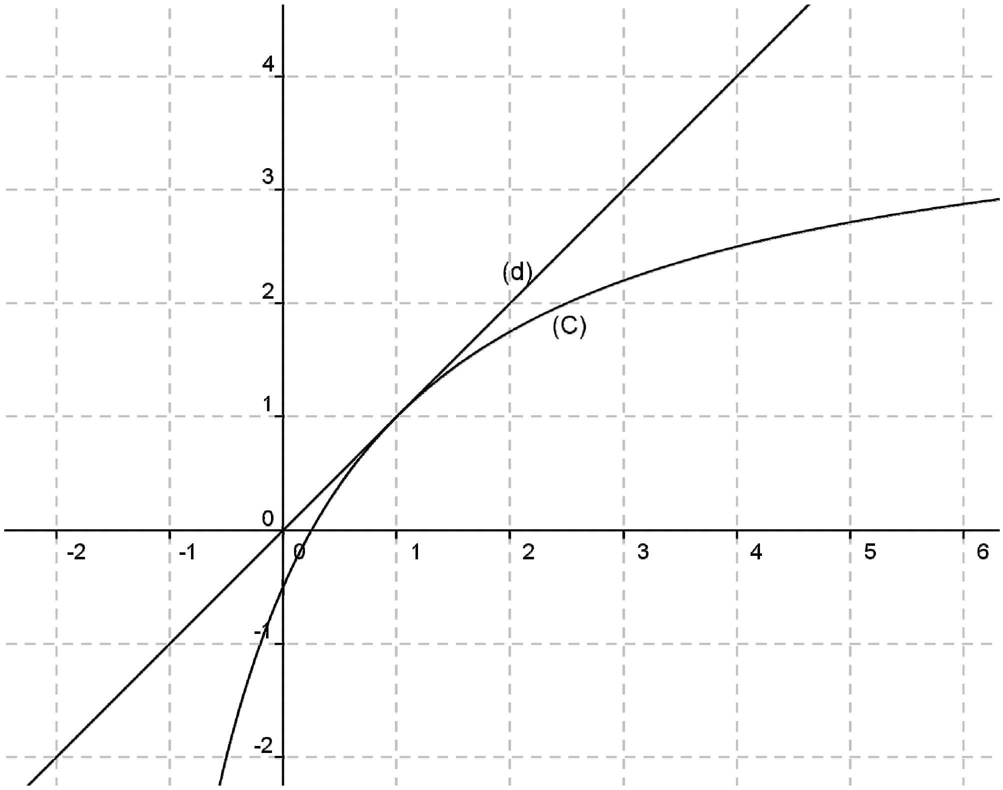
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer A(a) en fonction de a.

2. Exercice 2 (5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne ci-dessous une partie de la courbe représentative (C) de la fonction f ainsi que la droite (d) d'équation $y = x$.



1. a. Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n - 1 > 0$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b.

3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.

Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Exercice 3 (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit (P) le plan d'équation $3x + y - z - 1 = 0$ et (D) la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -t+1 \\ y = 2t \\ z = -t+2 \end{cases}$ où t désigne un nombre réel.

1. a. Le point $C(1\,;3\,;2)$ appartient-il au plan (P) ? Justifier.

b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans le plan (P).

2. Soit (Q) le plan passant par le point C et orthogonal à la droite (D).

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (Q).

b. Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan (Q) et de la droite (D).

c. Montrer que $CI = \sqrt{3}$.

3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite (D) de coordonnées $(-t+1\,;2t\,;-t+2)$.

a. Vérifier que pour tout nombre réel t, $CM_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.

b. Montrer que CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe $z_A = \sqrt{3}+2i$.

a. Montrer que le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2.

Sur une figure (unité graphique 1 cm), qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I, tracer le cercle Γ, puis construire le point A.

b. On considère la rotation r de centre le point I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Démontrer que le point B image du point A par la rotation r a pour affixe $z_B = -1 + i\left(1+\sqrt{3}\right)$. Justifier que le point B appartient au cercle Γ.

c. Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I.

d. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI}$.

Que peut-on conjecturer pour les droites (BF) et (CE) ? Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

Correction

1. a. On a $I(i)$ et $A\left(\sqrt{3}+2i\right)$ donc $IA = |z_A - z_I| = \sqrt{3+1} = 2$.

Le point A appartient au cercle (C) de centre le point I et de rayon 2 Pour construire le point A il suffit de tracer l'horizontale contenant le point $2i$ qui coupe le cercle (C). A est le point d'abscisse positive.

b. Par définition un point M d'affixe z a pour image M' d'affixe z' tel que $z' - z_I = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_I)$, soit $z' - i = i(z - i) \Leftrightarrow z' = iz + 1 + i$; on a donc $z_B = i\left(\sqrt{3}+2i\right) + 1 + i = -1 + i\left(1+\sqrt{3}\right)$.

La rotation est une isométrie, donc $IA = IB = 2$ d'après la question 1. a. : le point B appartient donc au cercle (C).

c. Par définition du milieu $z_I = \frac{z_A + z_C}{2} \Leftrightarrow z_C = 2z_I - z_A = 2i - 2i - \sqrt{3} = -\sqrt{3}$.

Remarque : on aurait pu dire que C est l'image de B par la rotation r.

d. Par définition de la rotation, la droite (BI) est perpendiculaire à la drtoite (IA). D'autre part [AC] est un diamètre de (C).

Le triangle ABC est inscrit dans le cercle (C) ; un de ses côtés est un diamètre, il est donc rectangle en B et (BI) étant à la fois hauteur et médiane, le triangle ABC est isocèle en B.

Le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

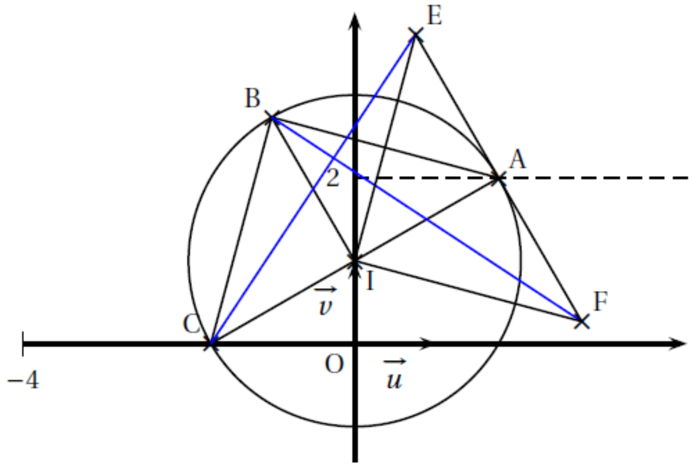
2. Il semble que (BF) et (CE) soient perpendiculaires et de même longueur.

Démonstration : il suffit de vérifier que $\frac{z_E - z_C}{z_F - z_B} = \pm i$.

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow z_E = z_B - z_I + z_A = -1 + i\left(1 + \sqrt{3}\right) - i + \sqrt{3} + 2i = -1 + \sqrt{3} + i\left(2 + \sqrt{3}\right)$;

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI} \Leftrightarrow z_F = z_I - z_B + z_A = i + 1 - i\left(1 + \sqrt{3}\right) + \sqrt{3} + 2i = 1 + \sqrt{3} + i\left(2 - \sqrt{3}\right)$;

$$\frac{z_E - z_C}{z_F - z_B} = \frac{-1+2\sqrt{3}+i\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}+i\left(1-2\sqrt{3}\right)} = \frac{\left[-1+2\sqrt{3}+i\left(2+\sqrt{3}\right)\right]\left[2+\sqrt{3}-i\left(1-2\sqrt{3}\right)\right]}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-2\sqrt{3}\right)^2} = \frac{i\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-2\sqrt{3}\right)^2\right]}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-2\sqrt{3}\right)^2} = i .$$



5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les deux rectangles $OABC$ et $DEFG$ où les points A, B, C, D, E, F, G ont pour affixes respectives $z_A = -2$, $z_B = -2+i$, $z_C = i$, $z_D = 1$, $z_E = 1+3i$, $z_F = \frac{5}{2} + 3i$, $z_G = \frac{5}{2}$. Faire la figure.

1. On considère la similitude directe s transformant O en D et A en E.

a. Justifier que l'écriture complexe de la similitude s est : $z' = -\frac{3}{2}iz + 1$.

b. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.

c. Quelle est l'image du rectangle $OABC$ par la similitude s ?

2. On considère la similitude indirecte s' d'écriture complexe $z' = -\frac{2}{3}i\bar{z} + \frac{5}{3}i$.

a. Déterminer l'image du rectangle $DEFG$ par la similitude s'.

b. On considère la similitude $g = s' \circ s$. Déterminer l'image du rectangle $OABC$ par la similitude g.

c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La similitude g a-t-elle des points fixes ? Que peut-on en conclure pour g ?