

Métropole

1. Exercice 1 (6 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

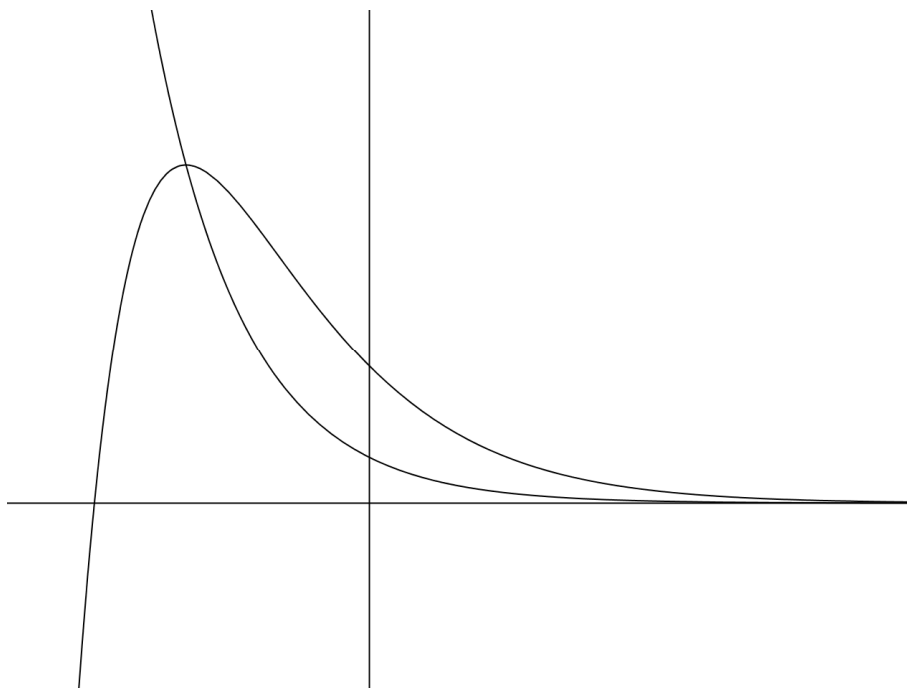
Partie A : On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{P} par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E').
3. Soit v une fonction définie et dérivable sur \mathbb{P} . Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').
4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B : On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble \mathbb{P} des nombres réels par $f_k(x) = (x + k)e^{-x}$ où k est un nombre réel donné.

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1. Montrer que la fonction f_k admet un maximum en $x = 1 - k$.
 2. On note M_k le point de la courbe C_k d'abscisse $1 - k$. Montrer que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.
 3. Sur le graphique ci-dessous le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas. Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :
 - la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$;
 - la courbe C_k d'équation $y = (x + k)e^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.
- a. Identifier les courbes et les nommer.



b. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.

4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^2 (x+2)e^{-x} dx$. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

2. Exercice 2 (5 points)

1. Restitution organisée de connaissances

Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

Définition : deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.

Propriété 1 : si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors pour tout entier naturel n , $v_n > u_n$.

Propriété 2 : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

2. Dans les cas suivants, les suites (u_n) et (v_n) ont-elles la même limite ? Sont-elles adjacentes ? Justifier les réponses.

a. $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$;

b. $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \ln(n+1) + \frac{1}{n}$;

c. $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$.

3. On considère un nombre réel a positif et les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout nombre entier naturel n non nul par : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = \ln\left(a + \frac{1}{n}\right)$. Existe-t-il une valeur de a telle que les suites soient adjacentes ?

3. Exercice 3 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

1. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 sont blanches et 3 sont noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire est égale à :

a. $\frac{21}{40}$	b. $\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{1}{3}$	c. $\frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{1}{3}$
--------------------	---	--

2. De la même urne, on tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs avec remise. La probabilité d'avoir obtenu 3 boules noires et 2 boules blanches est égale à :

a. $\frac{3^3 \times 7^2}{10^5}$	b. $\binom{5}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(\frac{7}{10}\right)^3$	c. $\binom{5}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^3 \times \left(\frac{7}{10}\right)^2$
----------------------------------	---	---

3. De la même urne, on tire une seule boule. Si elle est blanche, on lance un dé cubique (dont les faces sont numérotées de 1 à 6). Si la boule est noire, on lance un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). On suppose les dés bien équilibrés. Le joueur gagne s'il obtient le numéro 1.

Sachant que le joueur a gagné, la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche est égale à :

a. $\frac{7}{60}$	b. $\frac{14}{23}$	c. $\frac{\frac{7}{10} \times \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}$
-------------------	--------------------	--

4. On note X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un nombre réel strictement positif). La probabilité de l'évènement $[1 \leq X \leq 3]$ est égale à :

a. $e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$	b. $e^{-3\lambda} - e^{-\lambda}$	c. $\frac{e^{-\lambda}}{e^{-3\lambda}}$
-----------------------------------	-----------------------------------	---

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle C de centre O passant par A .

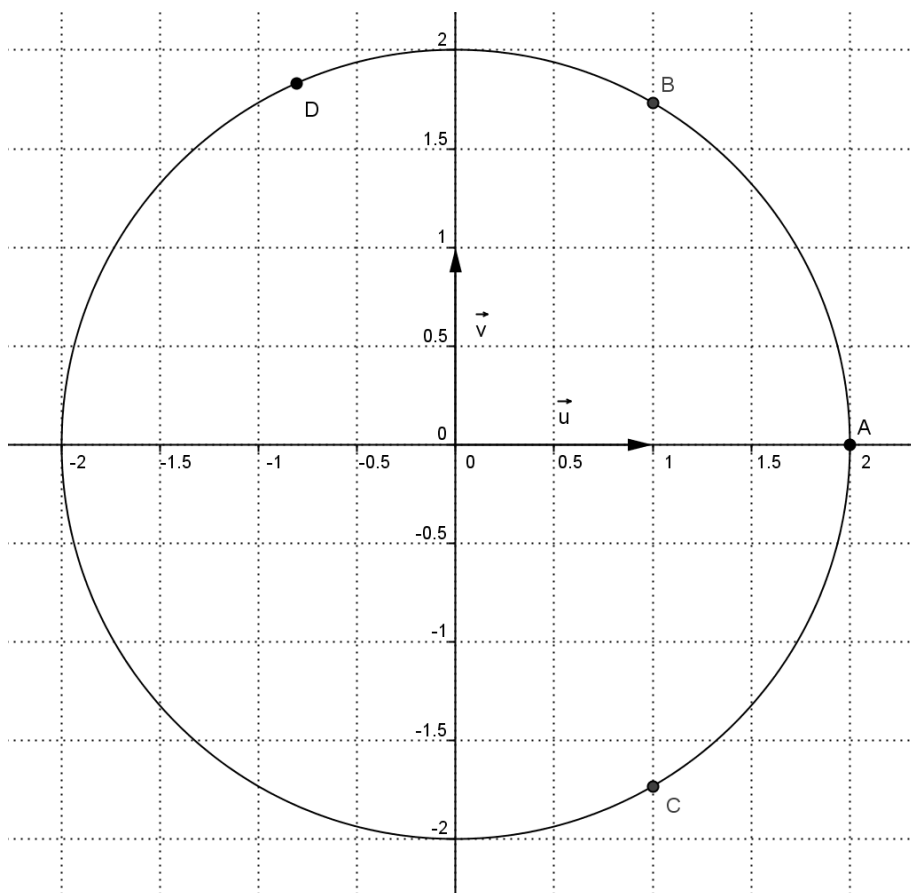
Dans tout l'exercice on note α le nombre complexe $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ et $\bar{\alpha}$ le nombre complexe conjugué du nombre complexe α .

1. a. Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\bar{\alpha} - 8$.

b. Démontrer que les points B et C d'affixes respectives α et $\bar{\alpha}$ appartiennent au cercle C .

2. Soit D un point du cercle C d'affixe $2e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel de l'intervalle $]-\pi; +\pi]$.

a. Construire sur la figure donnée ci-dessous le point E image du point D par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



b. Justifier que le point E a pour affixe $z_E = \alpha e^{i\theta}$.

3. Soient F et G les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[CE]$.

a. Justifier que le point F a pour affixe $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$.

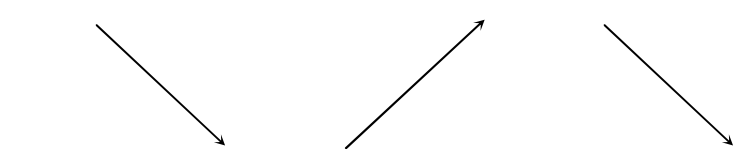
b. On admet que le point G a pour affixe $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2}$. Démontrer que $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$. On pourra utiliser la question 1. a. En déduire que le triangle AFG est équilatéral.

4. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on conjecture qu'il existe une position du point D , défini à la question 2, pour laquelle la longueur du côté AF du triangle AFG est minimale.

On admet que $AF^2 = 4 - 3 \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-\pi; +\pi]$ par $f(x) = 4 - 3 \cos x + \sqrt{3} \sin x$. Le tableau ci-dessous donne les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi; +\pi]$. Compléter ce tableau de variations. Permet-il de valider la conjecture ? Justifier.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
f				

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Dans tout l'exercice, $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique : 4 cm).

On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$.

1. On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point d'affixe $z' = -\bar{z} + 2$.

a. Déterminer les images respectives par la transformation T du point A et du point Ω d'affixe $1 + i\sqrt{3}$.

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T .

c. Déterminer l'image par la transformation T du cercle C de centre O et de rayon 1.

2. C' désigne le cercle de centre O' d'affixe 2 et de rayon 1.

a. Construire le point A' appartenant au cercle C' tel que : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A'}) = \frac{\pi}{3} [\text{mod } 2\pi]$.

b. À tout point M du cercle C d'affixe z , on associe le point M' du cercle C' d'affixe z' tel que :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = \frac{\pi}{3} [\text{mod } 2\pi].$$

Déterminer le module et un argument de $\frac{z' - 2}{z}$. En déduire que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2$.

c. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2$.

3. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

À tout point M du plan, on associe le point M_1 milieu du segment $[MM']$. Quel est le lieu géométrique du point M_1 lorsque M décrit le cercle C ?