

## Nouvelle - Calédonie

### 1. Exercice 1 (6 points)

**Partie A :** Restitution organisée de connaissances

On utilisera le résultat suivant : les solutions de l'équation différentielle  $y' = ay$  où  $a \in \mathbb{R}$  sont les fonctions  $g$  définies sur  $\mathbb{P}$  par  $g(x) = Ke^{ax}$  où  $K \in \mathbb{R}$ .

Le but de cette partie est de déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) :  $y' = ay + b$  où  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

1. Démontrer que la fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{P}$  par  $u(x) = -\frac{b}{a}$  est une solution de (E).

2. Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{P}$ . Démontrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow f - u \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = ay.$$

3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

**Partie B**

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note  $v(t)$  sa vitesse à l'instant  $t$ , où  $t$  est exprimé en secondes et  $v(t)$  en mètres par seconde.

On suppose de plus que la fonction  $v$  ainsi définie est dérivable sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

Un modèle simple permet de considérer que la fonction  $v$  est solution de l'équation différentielle :

$$10v'(t) + v(t) = 30.$$

Enfin, on suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle, c'est-à-dire que  $v(0) = 0$ .

1. Démontrer que  $v(t) = 30 \left( 1 - e^{-\frac{1}{10}t} \right)$ .

2. a. Déterminer le sens de variation de la fonction  $v$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

b. Déterminer la limite de la fonction  $v$  en  $+\infty$ .

3. On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération  $v'(t)$  est inférieure à  $0,1 \text{ m.s}^{-2}$ . Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de  $t$  à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.

4. La distance  $d$  parcourue par ce cycliste entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  est donnée par  $d = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$ .

Calculer la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes.

**Correction**

A1. Soit  $u(x) = -\frac{b}{a}$  :  $u' = 0$  donc  $au + b = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0 = u'$ .  $u$  est solution particulière de (E).

A2. Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{P}$ . Abordons l'équivalence « par la droite ».

$f - u$  solution de l'équation  $y' = ay \Leftrightarrow (f - u)' = a(f - u) \Leftrightarrow f' - u' = af - au$  (linéarité de la dérivation) soit  $f' - af = u' - au \Leftrightarrow f' - af = b$  puisque  $u' - au = b$ .

$f - u$  est solution de l'équation différentielle  $y' = ay \Leftrightarrow f' = af + b$ , ce qui équivaut à  $f$  solution de (E).

A3. D'après le pré requis, les solutions de l'équation différentielle  $y' = ay$  sont les fonctions de la forme  $y(x) = Ke^{ax}$ ,  $K \in \mathbb{R}$ . Par conséquent,  $f - u$  est solution de l'équation différentielle  $y' = ay$  ssi il existe un réel  $K$  tel que  $f(x) - u(x) = Ke^{ax}$  soit  $f(x) = u(x) + Ke^{ax}$  où  $u(x) = -\frac{b}{a}$ .

B1.  $10v'(t) + v(t) = 30 \Leftrightarrow v'(t) = -\frac{1}{10}v(t) + 3$  donc il existe un réel  $K$  tel que  $v(t) = Ke^{-\frac{1}{10}t} + 30$ .

On a  $v(0) = 0$  donc  $0 = Ke^{-\frac{1}{10} \times 0} + 30 \Leftrightarrow K = -30$ , soit  $v(t) = 30 - 30e^{-\frac{1}{10}t} = 30\left(1 - e^{-\frac{1}{10}t}\right)$ .

B2a. La fonction  $v$  est dérivable sur son domaine et on a  $v'(t) = -30 \times \left(-\frac{1}{10}\right)e^{-\frac{1}{10}t} = 3e^{-\frac{1}{10}t}$  :

l'exponentielle étant positive sur  $\mathbb{R}$ ,  $v'$  est positive donc  $v$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ , ce qui est cohérent avec la situation...

B2b. En  $-\infty$ , l'exponentielle tend vers 0 donc par produit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(t) = 30$ .

B3. Résolvons l'inéquation :

$v'(t) \leq 0,1 \Leftrightarrow 3e^{-\frac{1}{10}t} \leq 0,1 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{10}t} \leq \frac{0,1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{10}t \leq \ln\left(\frac{0,1}{3}\right) \Leftrightarrow t \geq -10 \ln\left(\frac{0,1}{3}\right)$  ; c'est donc à partir de  $t = 35$  secondes que la vitesse se stabilise.

B4. La distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes est donnée par

$$d = \int_0^{35} 30\left(1 - e^{-\frac{1}{10}t}\right) dt = 30 \left[ t + 10e^{-\frac{1}{10}t} \right]_0^{35} = 30(35 + 10e^{-3,5} - 10) \approx 759 \text{ mètres.}$$

## 2. Exercice 2 (4 points)

Chaque année, deux villages A et B organisent un concours sportif. Les concurrents tirent au sort un moyen de transport puis doivent relier le village A au village B le plus rapidement possible en utilisant ce moyen de transport et un parcours adapté.

Pour le tirage, on utilise une urne contenant 4 jetons indiscernables au toucher. Sur un premier jeton figure la lettre V, sur le second la lettre R, sur le troisième la lettre P et sur le dernier la lettre L.

Un concurrent tire au hasard un jeton :

- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre V, il effectuera le trajet à vélo ;
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre R, il effectuera le trajet en roller ;
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre P, il effectuera le trajet à pied ;
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisira librement son mode de transport parmi les trois précédents.

On observe que lorsqu'un concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisit le vélo dans 70 % des cas, il choisit le roller dans 20 % des cas et il décide de faire le parcours à pied dans 10 % des cas.

1. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.

Pour les questions suivantes, on donnera les résultats arrondis au millième.

2. Calculer la probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo.

3. Sachant qu'un concurrent a effectué le trajet à vélo, quelle est la probabilité qu'il ait tiré le jeton sur lequel figure la lettre L ?

4. On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres.

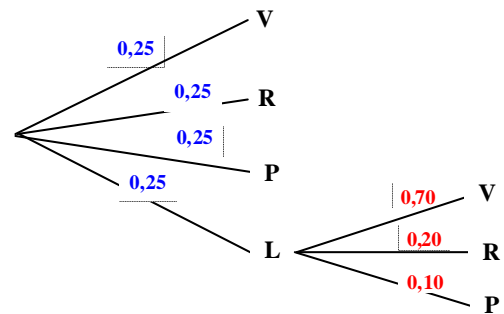
L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est  $\frac{2}{3}$ .

Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste ».

### Correction

On observe que lorsqu'un concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisit le vélo dans 70 % des cas, il choisit le roller dans 20 % des cas et il décide de faire le parcours à pied dans 10 % des cas.

1. Arbre pondéré correspondant à la situation :



2. Probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo : soit  $Ve$  cet événement ; On a :  $Ve = V \cup (L \cap Ve)$  ;

D'où :  $p(Ve) = p(V \cup (L \cap Ve)) = p(V) + p(L \cap Ve)$  car

$V$  et  $L \cap Ve$  incompatibles

$$= p(V) + p(L) \times p_L(Ve) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{70}{100} = 0,25 + 0,25 \times 0,7 = 0,25 + 0,175 = 0,425.$$

3. Sachant qu'un concurrent a effectué le trajet à vélo, probabilité qu'il ait tiré le jeton sur lequel figure la lettre L : il s'agit donc de déterminer la probabilité de l'événement  $L / Ve$  ;

$$\text{Or : } p(L / Ve) = \frac{p(L \cap Ve)}{p(Ve)} = \frac{0,175}{0,425} = \frac{7}{17} \approx 0,412.$$

4. On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres.

L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est  $\frac{2}{3}$ .

Probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste » :

D'après les hypothèses faites, on est en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 6$  et  $p = \frac{2}{3}$  ;

Soit alors  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de fois où le vainqueur aura effectué le trajet à vélo.

$X$  suit la loi binomiale  $B(6 ; 2/3)$  et  $p(X = k) = \binom{6}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{6-k}$  ;

La probabilité cherchée est alors :

$$p(X \leq 5) = 1 - p(X = 6) = 1 - \binom{6}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 1 - \frac{64}{729} = \frac{665}{729} \approx 0,912.$$

### 3. Exercice 3 (5 points)

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1) \end{cases}$  pour tout entier naturel  $n$ .

#### Partie A

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{P}$  par  $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$ .

1. Résoudre dans  $\mathbb{P}$  l'équation  $f(x) = x$ .

2. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ . En déduire que si  $x \in [0 ; 1]$  alors  $f(x) \in [0 ; 1]$ .

## Partie B

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n > 0$ ,  $u_n \in [0 ; 1]$ .
2. Étudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
3. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente. Déterminer sa limite.

### Correction

A1. Remarque : ne pas confondre cette question avec « Montrer qu'il existe une unique solution... » qui ferait plutôt appel au TVI.

On a  $f(x) = x \Leftrightarrow x - \ln(x^2 + 1) = x \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

A2.  $f$  est dérivable sur  $[0 ; 1]$  et on a  $f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2 + 1} = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$  donc la dérivée est positive et  $f$  croît sur  $[0 ; 1]$ .

Par ailleurs,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1 - \ln(2)$  et comme  $f$  croît sur cet intervalle on a pour tout  $x$  de  $[0 ; 1]$ ,  $0 \leq f(x) \leq f(1) \leq 1$ .

B1. Soit  $P(n)$  la proposition «  $u_n \in [0 ; 1]$  ».

$u_1 = 1 - \ln(2) \in [0 ; 1]$  donc  $P(1)$  est vraie (comme  $P(0)$  d'ailleurs)

Supposons  $u_n \in [0 ; 1]$  : d'après le A2, on sait que  $f(u_n) \in [0 ; 1]$  donc  $u_{n+1} \in [0 ; 1]$ .

B2. Pour tout  $n > 0$ ,  $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$  : comme  $u_n^2 \geq 0$ , on a  $u_n^2 + 1 \geq 1$  et  $\ln(u_n^2 + 1) \geq 0$  ; on a donc  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ , la suite décroît.

B3. La suite est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel  $l$  de  $[0 ; 1]$ .

On doit donc avoir  $l = f(l)$ , ainsi  $l = 0$  d'après A1.

### 4. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

?

### 5. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(-2 ; 0 ; 1)$ ,  $B(1 ; 2 ; -1)$  et  $C(-2 ; 2 ; 2)$ .

1. a. Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  puis les longueurs  $AB$  et  $AC$ .

b. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle  $\widehat{BAC}$ .

c. En déduire que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  est :  $2x - y + 2z + 2 = 0$ .

3. Soient  $P_1$  et  $P_2$  les plans d'équations respectives  $x + y - 3z + 3 = 0$  et  $x - 2y + 6z = 0$ .

Montrer que les plans  $P_1$  et  $P_2$  sont sécants selon une droite  $D$  dont un système d'équations

paramétriques est 
$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3t - 1, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

4. Démontrer que la droite  $D$  et le plan  $(ABC)$  sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

5. Soit  $S$  la sphère de centre  $\Omega(1 ; -3 ; 1)$  et de rayon  $r = 3$ .

a. Donner une équation cartésienne de la sphère  $S$ .

Dans les deux questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

b. Étudier l'intersection de la sphère  $S$  et de la droite  $D$ .

c. Démontrer que le plan  $(ABC)$  est tangent à la sphère  $S$ .

**Correction**

$$1a. \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, AB = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{17} ; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, AC = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5} ;$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \times 0 + 2 \times 2 + (-2) \times 1 = 2.$$

$$1b. \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}), \cos(\widehat{BAC}) = \frac{2}{\sqrt{5} \times \sqrt{17}}, \widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5} \times \sqrt{17}}\right) \approx 77^\circ.$$

1c. Si les points  $A, B$  et  $C$  étaient alignés, ils formeraient un angle de  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ , ce qui n'est pas le cas donc les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

2. Trois points non alignés définissent un plan, il suffit de vérifier que les coordonnées de chacun des points vérifient l'équation du plan... Ainsi une équation cartésienne de  $(ABC)$  est :  $2x - y + 2z + 2 = 0$ .

$$3. P_1 : x + y - 3z + 3 = 0 \text{ a } \vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ comme vecteur normal, et } P_2 : x - 2y + 6z = 0 \text{ a } \vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ comme}$$

vecteur normal. Ces deux vecteurs normaux ne sont pas colinéaires donc  $P_1$  et  $P_2$  sont sécants selon une droite  $D$ . On constate par ailleurs que pour tout  $t$ ,  $(-2) + (3t - 1) - 3(t) + 3 = 0$  donc  $D$  est incluse dans  $P_1$  et  $(-2) - 2(3t - 1) + 6t = 0$  donc  $D$  est incluse dans  $P_2$ .

Cette droite est incluse dans les deux plans, c'est donc la droite d'intersection.

4. Pour démontrer que la droite  $D$  et le plan  $(ABC)$  sont sécants, on prouve qu'il existe un unique réel  $t$  qui satisfait aux contraintes de  $D$  et du plan (on prouve ainsi en même temps qu'ils sont sécants et en quoi ils le sont). On a  $2(-2) - (3t - 1) + 2(t) + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ . Le point cherché est donc  $(-2; -4; -1)$ .

$$5a. \text{ Une équation cartésienne de la sphère } S \text{ est } (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9.$$

5b. Comme dans la question 4, cherchons un réel  $t$  qui vérifie les équations de  $D$  et de  $S$  :

$$(-2-1)^2 + (3t-1+3)^2 + (t-1)^2 = 9 \Leftrightarrow 10t^2 + 10t + 5 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 2t + 1 = 0 : \text{ ce trinôme a un discriminant négatif donc un tel } t \text{ n'existe pas et } S \text{ et } D \text{ ne s'intersectent pas.}$$

$$5c. \text{ Distance entre le centre de la sphère et le plan : } d(\Omega, P) = \frac{|2 \times 1 - 3 + 2 \times 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 3, \text{ soit le rayon de la sphère, d'où le résultat.}$$