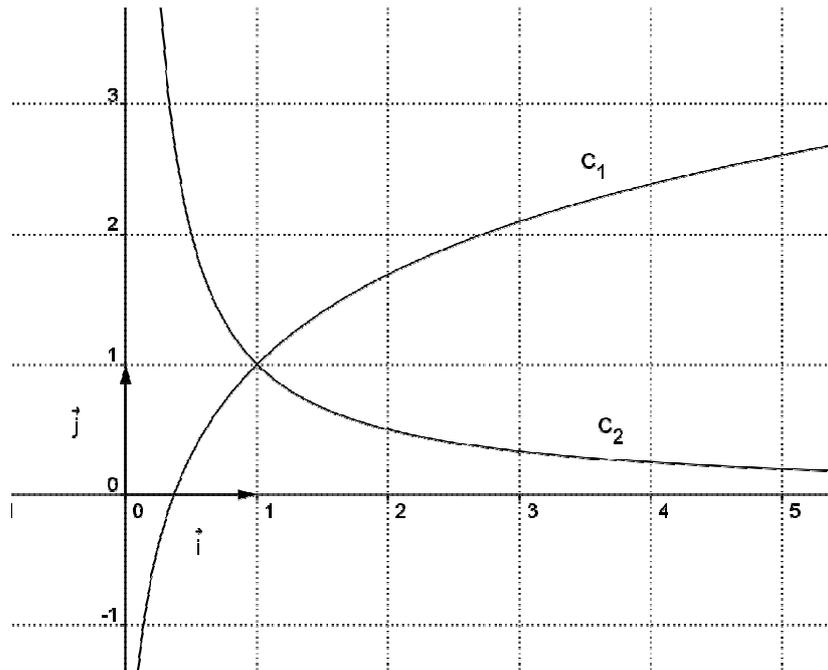


Pondicherry

1. Exercice 1 (10 points)

Partie I

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes C_1 et C_2 représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle $]0; +\infty[$.



On sait que :

- l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes C_1 et C_2 ;
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe C_2 ;
- la fonction f_2 est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$;
- la fonction f_1 est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$;
- la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$ est $+\infty$.

Pour chacune des quatre questions de cette partie, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse juste rapporte 0,5 point. Une réponse fautive ou l'absence de réponse n'est pas sanctionnée.

1. La limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est :

0	$+\infty$	On ne peut pas conclure
---	-----------	-------------------------

2. La limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est :

0	0,2	On ne peut pas conclure
---	-----	-------------------------

3. En $+\infty$, C_1 admet une asymptote oblique :

Oui	Non	On ne peut pas conclure
-----	-----	-------------------------

4. Le tableau de signes de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

x	0	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$		+

x	0	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$		-

x	0	1	$+\infty$	
$f_2(x) - f_1(x)$		+	0	-

Partie II

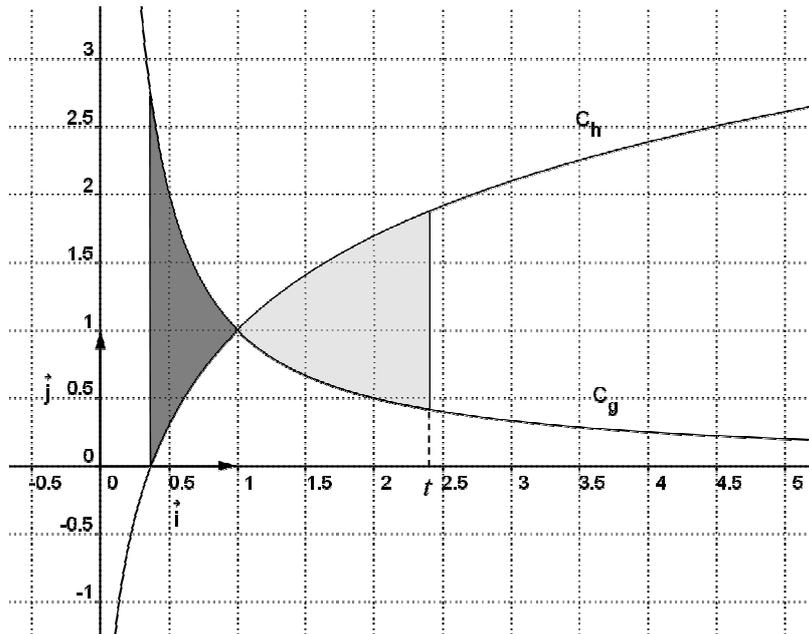
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x}$.

- Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
- Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $F(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.
- Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
- Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \frac{1}{e}$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1; +\infty[$ qu'on note α .
- Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

Partie III

Soit g et h les fonctions définies sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = \ln(x) + 1$.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes C_g et C_h représentatives des fonctions g et h .



- A est le point d'intersection de la courbe C_h et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées du point A.
- P est le point d'intersection des courbes C_g et C_h . Justifier que les coordonnées du point P sont $(1; 1)$.
- On note A l'aire du domaine délimité par les courbes C_g , C_h et les droites d'équations respectives $x = 1/e$ et $x = 1$ (domaine noir sur le graphique).
 - Exprimer l'aire A à l'aide de la fonction f définie dans la partie II.
 - Montrer que $A = 1 - \frac{1}{e}$.

4. Soit t un nombre réel de l'intervalle $]1; +\infty[$. On note B_t l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = t$ et les courbes C_g et C_h (domaine grisé sur le graphique).

On souhaite déterminer une valeur de t telle que $A = B_t$.

a. Montrer que $B_t = t \ln(t) - \ln(t)$.

b. Conclure.

2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

Partie 1

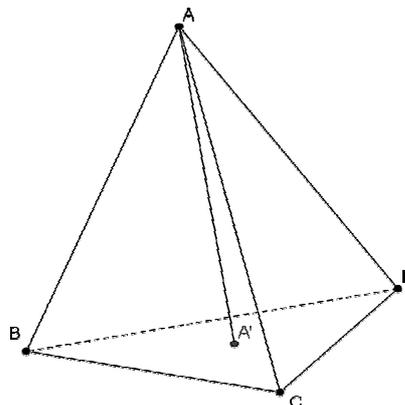
Dans cette partie, ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un solide dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

A' est le centre de gravité du triangle BCD.

Dans un tétraèdre, le segment joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée est appelé médiane. Ainsi, le segment $[AA']$ est une médiane du tétraèdre ABCD.

1. On souhaite démontrer la propriété suivante :

(P₁) : Dans un tétraèdre régulier, chaque médiane est orthogonale à la face opposée.



a. Montrer que $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ et que $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

(On pourra utiliser le milieu I du segment $[BD]$ et le milieu J du segment $[BC]$).

b. En déduire que la médiane (AA') est orthogonale à la face BCD.

Un raisonnement analogue montre que les autres médianes du tétraèdre régulier ABCD sont également orthogonales à leur face opposée.

2. G est l'isobarycentre des points A, B, C et D. On souhaite démontrer la propriété suivante :

(P₂) : Les médianes d'un tétraèdre régulier sont concourantes en G.

En utilisant l'associativité du barycentre, montrer que G appartient à la droite (AA') , puis conclure.

Partie II

On munit l'espace d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $P(1; 2; 3)$, $Q(4; 2; -1)$ et $R(-2; 3; 0)$.

1. Montrer que le tétraèdre OPQR n'est pas régulier.

2. Calculer les coordonnées de P' , centre de gravité du triangle OQR.

3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (OQR) est : $3x + 2y + 16z = 0$.

4. La propriété (P₁) de la partie 1 est-elle vraie dans un tétraèdre quelconque ?

3. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

Partie A

On considère, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, la surface S d'équation $z = (x - y)^2$.

1. On note E_1 l'intersection de S avec le plan P_1 d'équation $z = 0$.

Déterminer la nature de E_1 . On note E_2 l'intersection de S avec le plan P_2 d'équation $x = 1$.

Déterminer la nature de E_2 .

Partie B

On considère, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, la surface S' d'équation : $z = xy$.

1. On note E_3 l'intersection de S' avec le plan P_1 d'équation $z = 0$. Déterminer la nature de E_3 .

2. On note E_4 l'intersection de S' avec le plan P_3 d'équation $z = 1$. Déterminer la nature de E_4 .

Partie C

On note E_5 l'intersection de S et de S' .

Dans cette partie, on souhaite démontrer que le seul point appartenant à E_5 dont les coordonnées sont des entiers naturels est le point $O(0 ; 0 ; 0)$.

On suppose qu'il existe un point M appartenant à E_5 et dont les coordonnées x , y et z sont des entiers naturels.

1. Montrer que si $x = 0$, alors le point M est le point O .

2. On suppose dorénavant que l'entier x n'est pas nul.

a. Montrer que les entiers x , y et z vérifient $x^2 - 3xy + y^2 = 0$. En déduire qu'il existe alors des entiers naturels x' et y' premiers entre eux tels que $x'^2 - 3x'y' + y'^2 = 0$.

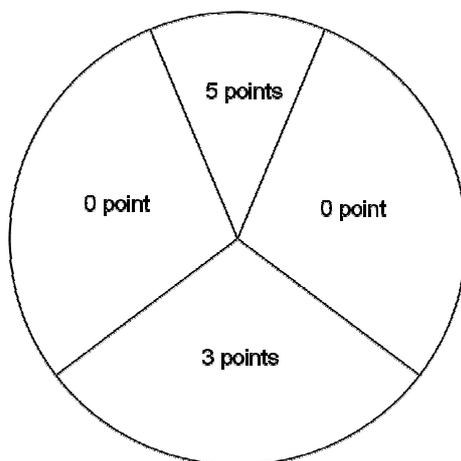
b. Montrer que x' divise y'^2 , puis que x' divise y' .

c. Établir que y' vérifie la relation $1 - 3y' + y'^2 = 0$.

d. Conclure.

4. Exercice 3 (5 points)

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1. Le joueur lance une fléchette.

On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.

On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.

On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.

On a donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1$. Sachant que $p_5 = \frac{1}{2}p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3}p_0$, déterminer les valeurs de p_0 , p_3 et p_5 .

2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points.

Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.

On note G_2 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».

On note G_3 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».

On note P l'évènement : « le joueur perd la partie ».

On note $p(A)$ la probabilité d'un évènement A .

a. Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p(G_2) = \frac{5}{36}$. On admettra dans la suite que

$$p(G_3) = \frac{7}{36}.$$

b. En déduire $p(P)$.

3. Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2. Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?

4. Pour une partie, la mise est fixée à 2 €. Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5 €. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3 €. S'il perd, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie. Les valeurs possibles pour X sont donc : -2, 1 et 3.

a. Donner la loi de probabilité de X .

b. Déterminer l'espérance mathématique de X . Le jeu est-il favorable au joueur ?