Amérique du Nord

1. Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère $(O\ ;\vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct.

On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = i$ et $b = 1 + i$.

On note : r_A la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_B la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O la rotation de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Partie A

On considère le point C d'affixe $c = 3i$. On appelle D l'image de C par r_A, G l'image de D par r_B et H l'image de C par r_O. On note d, g et h les affixes respectives des points D, G et H.

1. Démontrer que $d = -2 + i$.
2. Déterminer g et h.
3. Démontrer que le quadrilatère CDGH est un rectangle.

Partie B

On considère un point M, distinct de O et de A, d'affixe m. On appelle N l'image de M par r_A, P l'image de N par r_B et Q l'image de M par r_O.

On note n, p et q les affixes respectives des points N, P et Q.

1. Montrer que $n = im + 1 + i$. On admettra que $p = -m + 1 + i$ et $q = -im$.
2. Montrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.
3. a. Montrer l'égalité : $\frac{m-n}{p-n} = i + \frac{1}{m}$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer l'ensemble Γ des points M tels que le quadrilatère MNPQ soit un rectangle.

<u>Correction</u>

1. r_A a pour écriture complexe : $z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A) \Leftrightarrow z' - a = i(z - a) \Leftrightarrow z' = i(z - i) + i = iz + 1 + i$; donc $d = z_D = iz_C + 1 + i = ic + 1 + i = i \times 3i + 1 + i = -2 + i$.

2. r_B a pour écriture complexe : $z' - z_B = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_B) \Leftrightarrow z' - b = i(z - b) \Leftrightarrow z' = i(z - (1+i)) + (1+i) = iz + 2$; donc $g = z_G = iz_D + 2 = id + 2 = i \times (-2 + i) + 2 = 1 - 2i$.

r_O a pour écriture complexe : $z' - z_O = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_0) \Leftrightarrow z' = -iz$; donc $h = z_H = iz_C = -i \times 3i = 3$ (ou immédiatement !)

3. CDGH est un parallélogramme :

Méthode 1 : $\frac{z_C + z_G}{2} = \frac{c+g}{2} = \frac{3i + (1-2i)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et $\frac{z_D + z_H}{2} = \frac{d+h}{2} = \frac{(-2+i)+3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$;

les diagonales [CG] et [DH] ont le même milieu ; CDGH est donc un parallélogramme.

Méthode 2 : $z_{\overrightarrow{CH}} = z_H - z_C = h - c = 3 - 3i$ et $z_{\overrightarrow{DG}} = z_G - z_D = g - d = (1-2i) - (-2+i) = 3 - 3i$; les vecteurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont donc égaux ; CDGH est donc un parallélogramme.

CDGH est un rectangle :

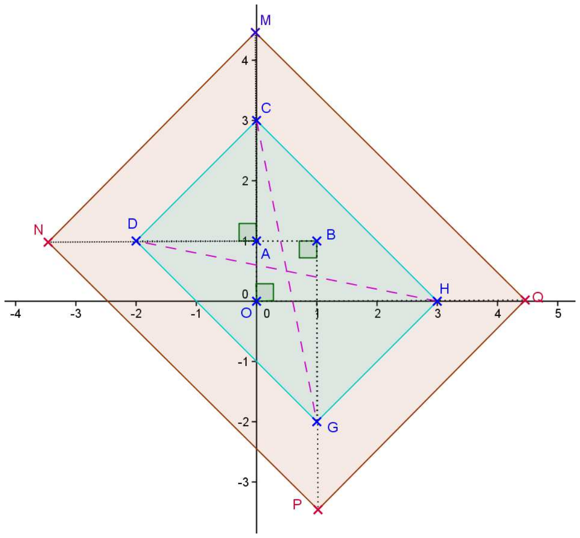
Méthode 1 : $CG = |z_G - z_C| = |g - c| = |(1-2i) - 3i| = |1 - 5i| = \sqrt{26}$

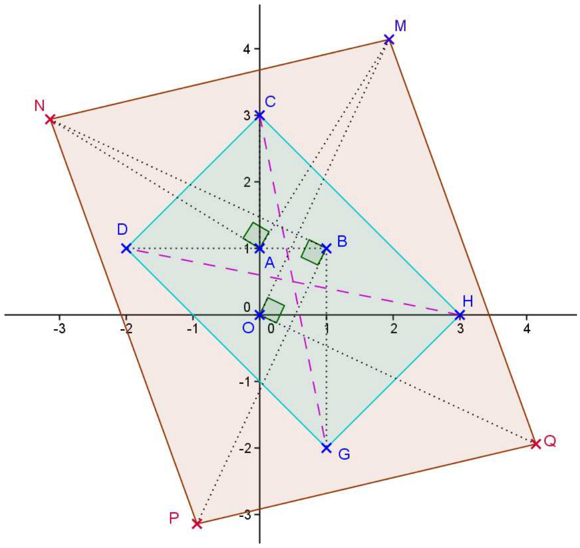
$DH = |z_H - z_D| = |h - d| = |3 - (-2+i)| = |5 - i| = \sqrt{26}$;

Les diagonales [CG] et [DH] ont donc la même longueur ; CDGH est donc un rectangle.

Méthode 2 : $\dfrac{z_H - z_C}{z_D - z_C} = \dfrac{h-c}{d-c} = \dfrac{3-3i}{(-2+i)-3i} = \dfrac{3-3i}{-2-2i} = \dfrac{(3-3i)(-2+2i)}{8} = \dfrac{-6+6i+6i+6}{8} = \dfrac{3}{2}i$ donc

$\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CH}\right) = \arg\left(\dfrac{z_H - z_C}{z_D - z_C}\right) = \arg\left(\dfrac{3}{2}i\right) = \dfrac{\pi}{2}$; les côtés [CD] et [CH] sont perpendiculaires.





Partie B

1. $n = im + 1 + i$ puisque n est l'affixe de N qui est l'image de M par r_A.

2. Le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme :

$\dfrac{z_M + z_P}{2} = \dfrac{m+p}{2} = \dfrac{m+(-m+1+i)}{2} = \dfrac{1+i}{2}$ et $\dfrac{z_N + z_Q}{2} = \dfrac{n+q}{2} = \dfrac{(im+1+i)+(-im)}{2} = \dfrac{1+i}{2}$;

les diagonales [MP] et [NQ] ont bien le même milieu.

3. a. $\dfrac{m-n}{p-n} = i + \dfrac{1}{m}$: $\dfrac{m-n}{p-n} = \dfrac{m-(im+1+i)}{(-m+\cancel{1}+\cancel{i})-(im+\cancel{1}+\cancel{i})} = \dfrac{(m-1)-i(m+1)}{-m-im} = \dfrac{(m-1)-i(m+1)}{-m(1+i)}$

$= \dfrac{[(m-1)-i(m+1)](1-i)}{-m(1^2+1^2)} = \dfrac{(m-1)(1-i)-(i+1)(m+1)}{-2m}$

$= \dfrac{\cancel{m} - 1 - im + \cancel{i} - im - \cancel{i} - \cancel{m} - 1}{-2m} = \dfrac{-\cancel{2} - \cancel{2}im}{-\cancel{2}m} = i + \dfrac{1}{m}$.

b. Le quadrilatère MNPQ, qui est déjà un parallélogramme, est un rectangle $\Leftrightarrow$ il a deux côtés consécutifs perpendiculaires $\Leftrightarrow$ ses côtés [NP] et [NM] sont donc perpendiculaires $\Leftrightarrow$ $\left(\overrightarrow{NP};\overrightarrow{NM}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{m-n}{p-n}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow$

$\arg\left(\dfrac{1}{m}+i\right) = \pm\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{m} + i = ki \Leftrightarrow \dfrac{1}{m} = (k-1)i \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{(k-1)}\dfrac{1}{i} = \dfrac{-1}{(k-1)}i$; m est sur l'axe vertical.

Remarque : Résultat conforme avec ceux établis dans le cas particulier de la partie A.

2. Exercice 2 (4 points)

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis. On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.

Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?

Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Ainsi, pour tout réel *t* positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à *t* années, notée $p(X \leq t)$, est donnée par : $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

1. Déterminer λ sachant que $p(X > 5) = 0,4$.

2. Dans cette question on prendra $\lambda = 0,18$.

Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

3. Dans cette question on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.

a. On considère un lot de 10 ordinateurs. Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.

b. Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999 ?

<u>Correction</u>

Partie A

Situation d'équiprobabilité où il y a $\binom{25}{2} = 300$ cas possibles et $\binom{3}{2} = 3$ cas favorables à l'événement E : « 2 ordinateurs sur les 3 choisis soient défectueux » d'où : $p(E) = \frac{3}{300} = \frac{1}{100} = 0,01$.

Partie B

Rappel : $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda x}$, $p(X > t) = e^{-\lambda t}$.

1. λ sachant que $p(X > 5) = 0,4 \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = 0,4$ soit $-5\lambda = \ln 0,4 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 0,4}{-5} \approx 0,18$.

2. On cherche la probabilité suivante : $p_{X>3}(X > 5)$; or une loi exponentielle exprime un processus sans vieillissement, les trois premières années comptent pour du beurre : $p_{X>3}(X > 5) = p(X > 2) = e^{-2\lambda} \approx e^{-2\times 0,18} \approx 0,698$;

3. a. On est en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètres n = 10 et p = 0,4 ; soit alors Y la variable aléatoire égale au nombre d'ordinateurs qui auront une durée de vie supérieure à 5 ans (sur les 10 choisis) : Y suit la loi binomiale B(10 ; 0,4) et $p(Y = k) = \binom{10}{k} \times 0,4^k \times 0,6^{10-k}$;

La probabilité cherchée est alors : $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0,6^{10} \approx 0,994$.

b. On est toujours en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètres n (inconnu) et p = 0,4 ; soit alors Y la variable aléatoire égale au nombre d'ordinateurs qui auront une durée de vie supérieure à 5 ans (sur les n choisis) ; Y suit la loi binomiale B(n ; 0,4) et $p(Y = k) = \binom{n}{k} \times 0,4^k \times 0,6^{n-k}$.

L'événement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » est l'événement $(Y \geq 1)$, sa probabilité est donc $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0,6^n$ et le problème revient alors à résoudre l'inéquation suivante : $1 - 0,6^n > 0,999 \Leftrightarrow 10^{-3} > 0,6^n \underset{\ln \text{ croissante}}{\Leftrightarrow} \ln\left(10^{-3}\right) > \ln\left(0,6^n\right)$

$\underset{\ln x^n = n \ln x \text{ si } x>0}{\Leftrightarrow} -3\ln 10 > n \ln 0,6 \underset{\ln x<0 \text{ si } 0<x<1}{\Leftrightarrow} n > \frac{-3\ln 10}{\ln 0,6} \Leftrightarrow n \geq 14$;

Il faut donc choisir au minimum 14 ordinateurs pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999.

3. Exercice 3 (5 points, non spécialistes)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On considère trois points A, B et C de l'espace et trois réels *a*, *b* et *c* de somme non nulle.

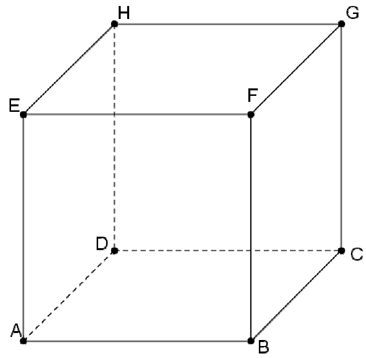
Démontrer que, pour tout réel *k* strictement positif, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\| a\overrightarrow{\mathrm{MA}} + b\overrightarrow{\mathrm{MB}} + c\overrightarrow{\mathrm{MC}} \right\| = k$ est une sphère dont le centre est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs *a*, *b* et *c*.

Partie B

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1 représenté ci-contre.

Il n'est pas demandé de rendre le graphique avec la copie.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}} \right)$.



1. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (1 ; 0 ; 1) est un vecteur normal au plan (BCE).

2. Déterminer une équation du plan (BCE).

3. On note (Δ) la droite perpendiculaire en E au plan (BCE).
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).

4. Démontrer que la droite (Δ) est sécante au plan (ABC) en un point R, symétrique de B par rapport à A.

5. a. Démontrer que le point D est le barycentre des points R, B et C affectés des coefficients 1, −1 et 2.

b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\left\| \overrightarrow{\mathrm{MR}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{MC}} \right\| = 2\sqrt{2}$.

c. Démontrer que les points B, E et G appartiennent à l'ensemble (S).

d. Démontrer que l'intersection du plan (BCE) et de l'ensemble (S) est un cercle dont on précisera le rayon.

<u>Correction</u>

Pour tout point M on a : $a\overrightarrow{\mathrm{MA}} + b\overrightarrow{\mathrm{MB}} + c\overrightarrow{\mathrm{MC}} = (a+b+c)\overrightarrow{\mathrm{MG}}$ d'où

$$\left\| a\overrightarrow{\mathrm{MA}} + b\overrightarrow{\mathrm{MB}} + c\overrightarrow{\mathrm{MC}} \right\| = k \Leftrightarrow \left\| (a+b+c)\overrightarrow{\mathrm{MG}} \right\| = k \underset{\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|}{\Leftrightarrow} |a+b+c| \times \left\| \overrightarrow{\mathrm{MG}} \right\| = k \underset{a+b+c \neq 0}{\Leftrightarrow} GM = \frac{k}{|a+b+c|}$$. Ok.

Partie B

1. Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (1 ; 0 ; 1) est un vecteur normal au plan (BCE) :

$\overrightarrow{BC}(0;1;0)$ donc $\vec{n}.\overrightarrow{BC} = 1\times 0 + 0\times 1 + 1\times 0 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{BC}$;

$\overrightarrow{BE}(-1;0;1)$ donc $\vec{n}.\overrightarrow{BE} = 1\times(-1) + 0\times 0 + 1\times 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{BE}$; $\vec{n}$ étant orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (BCE) est bien est un vecteur normal au plan (BCE).

2. Une équation du plan (BCE) : $\vec{n}(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ étant un vecteur normal au plan (BCE), (BCE) admet une équation cartésienne de la forme : $x + z + d = 0$; Et comme B(1 ; 0 ; 0) ∈ (BCE), $1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$; d'où (BCE) : $x + z - 1 = 0$.

3. (Δ) étant perpendiculaire au plan (BCE), tout vecteur normal à (BCE) est un vecteur directeur de (Δ) ; $M(x;y;z) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{EM} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x-0 = k\times 1 \\ y-0 = k\times 0 \\ z-1 = k\times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = 0 \\ z = 1+k \end{cases}$.

4. Le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $z = 0$;

$$M\left(x;y;z\right)\in\left(\Delta\right)\cap\left(ABC\right)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=k\\ y=0\\ z=1+k\end{array}\right.\\ z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=0\\ \left\{\begin{array}{l}x=k\\ y=0\\ 0=1+k\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=0\\ \left\{\begin{array}{l}x=-1\\ y=0\\ k=-1\end{array}\right.\end{array}\right.;$$

La droite (Δ) est donc sécante au plan (ABC) en le point R(−1 ; 0 ; 0) qui est bien le symétrique de B par rapport à A.

5.

a. Le point D est le barycentre des points R, B et C affectés des coefficients 1, −1 et 2 :

Soit G le barycentre, qui existe bien puisque 1 + (−1) + 2 ≠ 0, des points R, B et C affectés des coefficients 1, −1 et 2 ; Alors G a pour coordonnées : $\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{x_R-x_B+2x_C}{2}=\dfrac{-1-1+2}{2}=0=x_D\\ y=\dfrac{y_R-y_B+2y_C}{2}=\dfrac{0-0+2}{2}=1=y_D\\ z=\dfrac{z_R-z_B+2z_C}{2}=\dfrac{0-0+0}{2}=0=z_D\end{array}\right.$; Donc G = D ;

Le point D est donc bien le barycentre des points R, B et C affectés des coefficients 1, −1 et 2.

b. $M\in(S)\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{MR}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\left\|2\overrightarrow{MD}\right\|=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\cancel{2}\times MD=\cancel{2}\sqrt{2}\Leftrightarrow DM=\sqrt{2}$;

L'ensemble (S) est donc la sphère de centre D et de rayon $\sqrt{2}$.

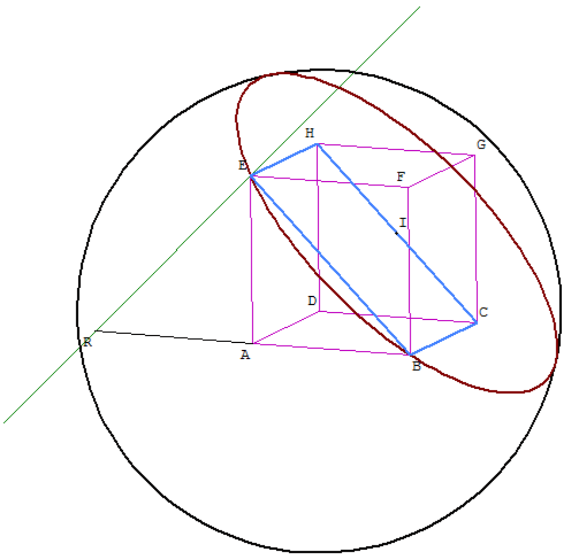
c. Les points B, E et G appartiennent à l'ensemble (S) car DB = DE = DG = $\sqrt{2}$ (diagonales de carrés de côté 1).

d. L'intersection du plan (BCE) et de la sphère (S) contenant déjà 3 points est donc bien un cercle (C) ; on retrouve ceci en calculant la distance de D au plan (BCE) :

$$d\left(D;(BCE)\right)=\frac{\left|x_D+z_D-1\right|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{\left|0+0-1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<\sqrt{2}\ ;$$

Le centre de (C) est le projeté orthogonal de D sur le plan (BCE) qui est I le milieu de [DG] ; le rayon *r* de (C) est tel que

$$d\left(D;(BCE)\right)^2+r^2=R^2\Leftrightarrow r^2=\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow r=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$



4. Exercice 3 (5 points, spécialistes)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

« Si p est un nombre premier et q un entier naturel premier avec p, alors $q^{p-1} \equiv 1(\text{modulo } p)$ ».

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

1. Calculer les six premiers termes de la suite.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.

On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n).

4. Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?
5. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.

a. Montrer que $6 \times 2^{p-2} \equiv 3[p]$ et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2[p]$.

b. En déduire que $6 \times u_{p-2} \equiv 0[p]$.

c. Le nombre p appartient-il à l'ensemble (E) ?

Correction

5. Exercice 4 (6 points)

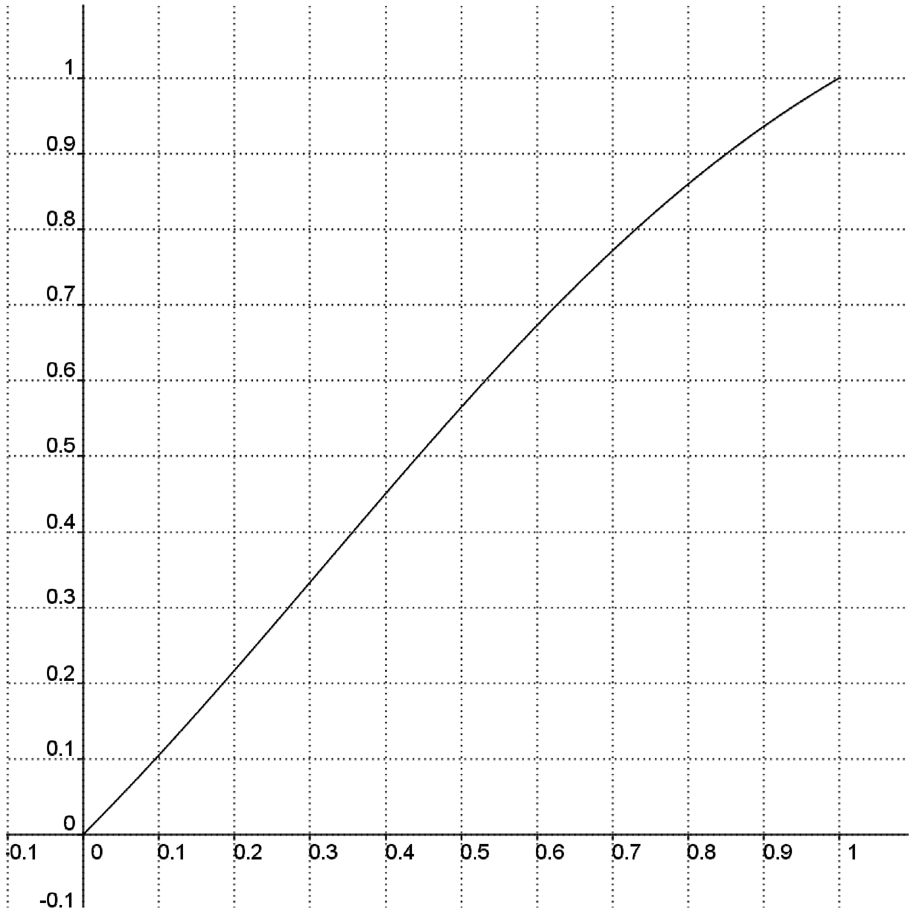
Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire que pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$. La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée ci-dessous.



On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0\,;1]$, $f(x) \in [0\,;1]$.

2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

a. Montrer que pour tout x de $[0\,;1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)\,g(x)}{e^x - x}$.

b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0\,;1]$.

3. a. Déterminer une primitive de f sur $[0\,;1]$.

b. Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, pour tout entier naturel n.

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \le u_n \le u_{n+1} \le 1$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

<u>Correction</u>

Partie A

1. Les variations de la fonction g : g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $g'(x)=e^x-1$; $g'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$; g' étant strictement positive sur l'intervalle $]0;+\infty[$, g est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. Le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x : $g(0)=e^0-0-1=0$; g étant croissante, g est nulle en 0 et strictement positive sur l'intervalle.

3. $g(x)\geq 0 \Leftrightarrow e^x-x-1\geq 0 \Leftrightarrow e^x-x\geq 1 \Rightarrow e^x-x>0$.

Partie B

1. Comme f est strictement croissante sur $[0;1]$, $f(0)\leq f(x)\leq f(1)$; or $f(0)=\dfrac{e^0-1}{e^0-0}=\dfrac{0}{1}=0$ et $f(x)=\dfrac{e^1-1}{e^1-1}=1$; donc pour tout x de $[0;1]$, $f(x)\in[0;1]$.

2. a. On a $f(x)-x=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}-x=\dfrac{e^x-1-x\left(e^x-x\right)}{e^x-x}=\dfrac{e^x-1-xe^x-x^2}{e^x-x}$,

et $\dfrac{(1-x)\left(e^x-x-1\right)}{e^x-x}=\dfrac{\left(e^x-\cancel{x}-1\right)-\left(xe^x-x^2-\cancel{x}\right)}{e^x-x}=\dfrac{e^x-1-xe^x+x^2}{e^x-x}$; ok.

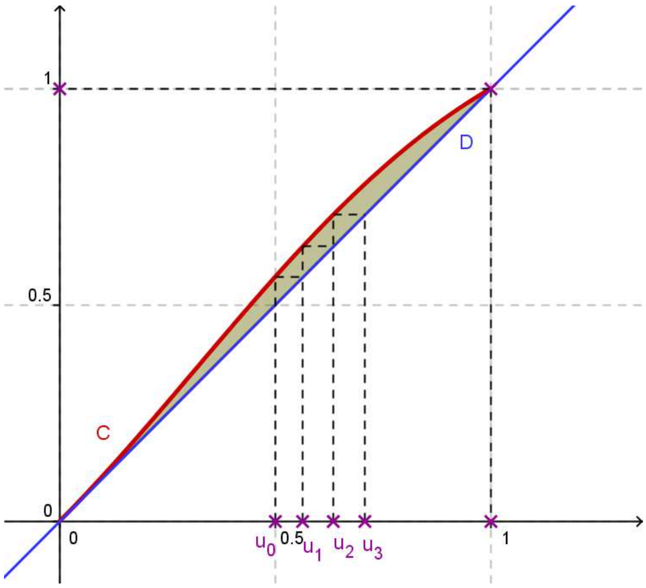
b. La position de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0;1]$ est donnée par le signe de $f(x)-x$; or $f(x)-x>0 \Leftrightarrow \dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}>0 \underset{e^x-x>0}{\Leftrightarrow} (1-x)g(x)>0 \underset{1-x>0 \text{ sur } [0;1]}{\Leftrightarrow} g(x)>0 \Leftrightarrow x>0$; la droite (D) est située au-dessous de la courbe (C) sur $]0;1]$ et la coupe au point O.

3. a. Une primitive de f sur $[0;1]$: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x)=e^x-x$; comme u > 0 sur $[0;1]$ (cf. A.3.), une primitive F de f est définie par : $F(x)=\ln\left(u(x)\right)=\ln\left(e^x-x\right)$.

b. L'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations x = 0 et x = 1 : la courbe (C) étant située au-dessus la droite (D) sur l'intervalle $[0;1]$, cette aire vaut en u.a. : $\int_0^1 f(x)-x\,dx=\left[F(x)-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\left[\ln\left(e^x-x\right)-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\ln\left(e\ -1\right)-\frac{1}{2}\approx 0,04$.

Partie C

1. Construction sur l'axe des abscisses des quatre premiers termes de la suite :



2. Effectuons un raisonnement par récurrence ; P$_n$ la propriété : « $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ » ;

Initialisation : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = f(u_0) = f(0,5) = \frac{e^{0,5} - 1}{e^{0,5} - 0,5} \approx 0,56$; P$_1$ est vraie.

Hérédité : Supposons que, pour un n donné $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$; f étant croissante sur $[0;1]$, on en déduit que $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$; d'où puisque $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$ et $f(1) = 1$: $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$; P$_{n+1}$ est vraie si P$_n$ l'est.

3. Puisque $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ pour tout n, la suite (u_n) est donc croissante et majorée (par 1) ; elle est donc convergente, de limite l dans $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

La fonction f étant continue, par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, il vient :

$l = f(l) \Leftrightarrow f(l) - l = 0 \Leftrightarrow (1-l)g(l) = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} l = 1 \\ l = 0 \end{array} \right.$; donc, puisque $l \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, $l = 1$.