France

1. *Exercice 1 (4 points)*

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.

Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus.

Partie A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

– La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).

– La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».

$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. a. Préciser les valeurs des probabilités $p(V)$, $p_V(T)$, $p_{\overline{V}}(\overline{T})$.

Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b. En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.

2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.

a. Justifier par un calcul la phrase :

« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40%de « chances » que la personne soit contaminée ».

b. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

Partie B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

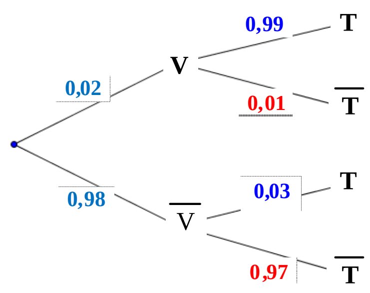
<u>Correction</u>

Partie A

1. a. Les données de l'énoncé permettent de donner directement :

$p(V) = 0{,}02$; $p_V(T) = 0{,}99$; $p_{\overline{V}}(\overline{T}) = 0{,}97$.

Arbre pondéré :



b. $p(V \cap T) = p(V) \times p_V(T) = 0{,}02 \times 0{,}99 = 0{,}0198$.

2. On cherche $p(T)$ or $T = (V \cap T) \cup (\overline{V} \cap T)$ (formule des probabilités totales) d'où : $p(T) = p\left((V \cap T) \cup (\overline{V} \cap T)\right)$

$= p(V \cap T) + p(\overline{V} \cap T)$ car ces 2 événements sont incompatibles,

$= 0{,}0198 + p(\overline{V}) \times p_{\overline{V}}(T)$ car il y a dépendance,

$= 0{,}0198 + 0{,}98 \times 0{,}03 = 0{,}0198 + 0{,}0294 = 0{,}0492$.

3. a. Probabilité que la personne soit contaminée si le test est positif :

$$p_T(V)=\frac{p(V\cap T)}{p(T)}=\frac{0{,}0198}{0{,}0492}\approx 0{,}402\,.$$

b. On cherche $p_{\overline{T}}\left(\overline{V}\right)$: $p_{\overline{T}}\left(\overline{V}\right)=\dfrac{p\left(\overline{T}\cap\overline{V}\right)}{p\left(\overline{T}\right)}==\dfrac{p\left(\overline{V}\right)\times p_{\overline{V}}\left(\overline{T}\right)}{1-p(T)}=\dfrac{0{,}98\times 0{,}97}{1-0{,}0492}=\dfrac{0{,}9506}{0{,}9508}\approx 0{,}9998\,.$

Partie B

1. À une personne choisie au hasard, on associe deux « issues » : soit la personne est contaminée (avec une probabilité $p = p(V) = 0{,}02$), soit elle ne l'est pas ; c'est donc une épreuve de Bernoulli.

On répète cette expérience 10 fois ; on a donc un schéma de Bernoulli. X compte le nombre de personne contaminées et suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}02$.

2. On cherche $p(X\geq 2)=1-p(X<2)=1-\left(p(X=0)+p(X=0)\right)$

$$=1-\left(\binom{10}{0}\times 0{,}02^0\times 0{,}98^{10}+\binom{10}{1}\times 0{,}02^1\times 0{,}98^9\right)$$

$$=1-\left(0{,}98^{10}+10\times 0{,}02\ \times 0{,}98^9\right)\approx 1-0{,}9838\approx 0{,}0162\,.$$

2. Exercice 2 (4 points)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = i$, $z_C = -1$, $z_D = -i$.

1. L'image E du point D par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ a pour affixe :

• $z=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$ • $z=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)(1-i)$ • $z=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)(1-i)$ • $z=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$.

2. L'ensemble des points d'affixe z telle que $|z+i|=|z-1|$ est :

• la médiatrice du segment [BC],
• le milieu du segment [BC],
• le cercle de centre O et de rayon 1,
• la médiatrice du segment [AD].

3. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\dfrac{z+i}{z+1}$ soit un imaginaire pur est :

• la droite (CD) privée du point C,
• le cercle de diamètre [CD] privé du point C,
• le cercle de diamètre [BD] privé du point C,
• la médiatrice du segment [AB].

4. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\arg(z-i)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$ est :

• le demi-cercle de diamètre [BD] passant par A,
• la droite (BD),
• la demi-droite]BD) d'origine B passant par D privée de B,
• le cercle de diamètre [BD] privé de B et D.

Correction

1. $E = r_{A;\frac{\pi}{3}}(D) \Leftrightarrow z_e - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_A) \Leftrightarrow z_E = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_D - z_A) + z_A$

$\Leftrightarrow z_E = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-i-1)+1 = \left(-\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1 = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) - i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)(1-i)$.

☞ réponse 2.

2. $|z+i| = |z-1| \Leftrightarrow |z - z_D| = |z - z_A| \Leftrightarrow DM = AM$: l'ensemble est donc la médiatrice du segment [AD].

☞ réponse 4.

3. $\frac{z+i}{z+1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z - z_D}{z - z_C} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{DM}$ (et M ≠ C). L'ensemble est donc le cercle de diamètre [CD] privé du point C. ☞ réponse 2.

4. $\arg(z-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \arg(z - z_B) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$: l'ensemble est donc la demi droite]BD) d'origine B, passant par D et privée du point B (car sinon $z - i = 0$ et on ne peut pas considérer l'argument) ☞ réponse 3.

3. Exercice 3 (7 points)

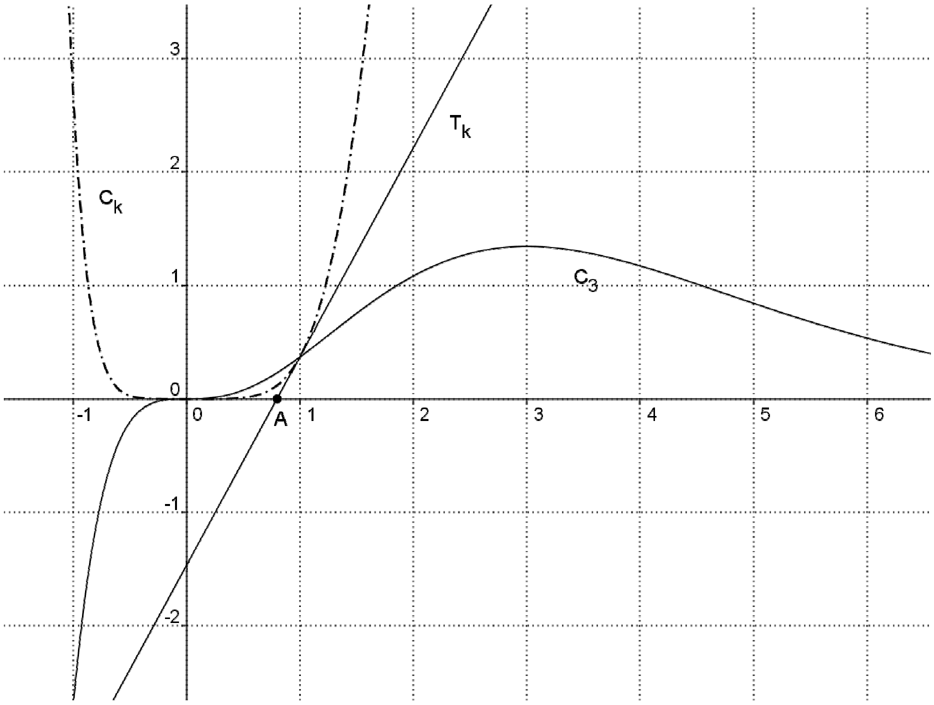
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur P par :

$$f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

On note C_n sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe C_k où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe C_3.



La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5} ; 0\right)$.

1. a. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.

c. À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.

2. a. Démontrer que pour $n > 1$, toutes les courbes C_n passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.

b. Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x, $f'_n(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$.

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$.
Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

4. a. Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1} ; 0\right)$.

b. En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

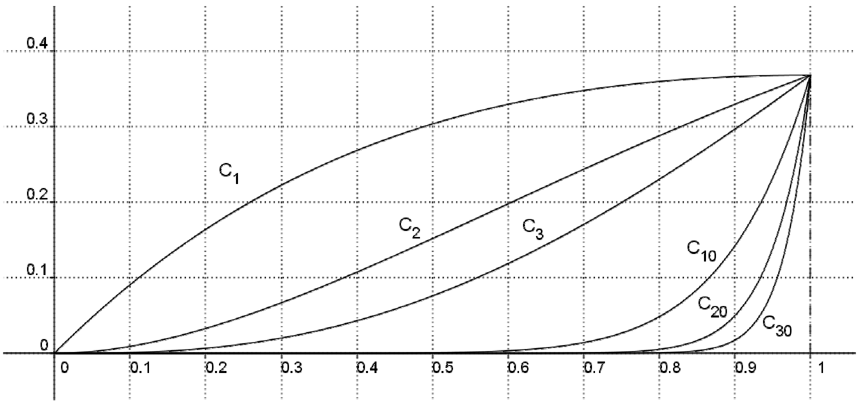
Partie B

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. Calculer I_1.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}, C_{30} comprises dans la bande définie par $0 \le x \le 1$.



a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant votre démarche.

b. Démontrer cette conjecture.

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

d. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Correction

1. $f_1(x) = xe^{-x}$.

a. Limite de f_1 en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0^+$), donc par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$.

En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (croissances comparées) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$.

b. La fonction f_1 est dérivable sur P comme produit de fonctions dérivables et pour tout réel x, $f_1'(x) = 1\times e^{-x} + x\times\left(-e^{-x}\right) = (1-x)e^{-x}$.

c. Signe de f_1' : $f_1'(x) > 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{-x} > 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{e^{-x}>0} 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$;

Variations de f_1 : f_1 est donc croissante avant 1 et décroissante après 1.

La courbe C_k ne correspond donc pas à C_1 (variations non cohérentes) donc $k \neq 1$; comme $k \geq 1$, $k \geq 2$.

2. $f_n(x) = x^n e^{-x}$

a. $f_n(0) = 0 \Rightarrow O(0;0) \in C_n$, les courbes C_n passent toutes par O ;

$f_n(1) = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \Rightarrow B\left(1;\dfrac{1}{e}\right) \in C_n$, les courbes C_n passent toutes par $B\left(1;\dfrac{1}{e}\right)$.

b. Pour tout entier naturel n non nul f_n est dérivable sur P comme produit de fonctions dérivables et pour tout réel x : $f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} + x^n\left(-e^{-x}\right) = x^{n-1}e^{-x}(n-x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$.

3. Pour tout réel x on a : $f_3'(x) = x^2(3-x)e^{-x}$, et

$$f_3'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2(3-x)e^{-x} > 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{x^2e^{-x} \geq 0} 3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3 \ ;$$

f_3 est donc croissante avant 3 et décroissante après ; elle admet donc bien un maximum en 3.

4. a. L'équation de T_k est : $y = f_k'(1)(x-1) + f_k(1)$; or $f_k(1) = \dfrac{1}{e}$ et $f_k'(1) = (k-1)e^{-1} = \dfrac{k-1}{e}$ d'où

$T_k : y = \dfrac{k-1}{e}(x-1) + \dfrac{1}{e} = \dfrac{k-1}{e}x + \dfrac{-k+2}{e}$; la droite T_k coupe donc l'axe des abscisses lorsque

$$y = 0 \Leftrightarrow \frac{k-1}{e}x + \frac{-k+2}{e} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{-k+2/\cancel{e}}{k-1/\cancel{e}} = \frac{k-2}{k-1}.$$

b. On déduit de ce qui précède et des données de l'énoncé que :

$\left(\dfrac{k-2}{k-1};0\right) = \left(\dfrac{4}{5};0\right) \Leftrightarrow \dfrac{k-2}{k-1} = \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow 5(k-2) = 4(k-1) \Leftrightarrow k = 6$.

Partie B

1. Calcul de $I_1 = \displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties : posons $\begin{cases} u'(x) = e^{-x} \\ v(x) = x \end{cases}$ et $\begin{cases} u(x) = -e^{-x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$;

grâce à la formule d'intégration par parties, il vient :

$I_1 = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \left(-e^{-x}\right) \times 1\,dx = \left[\left(-e^{-1}\right) - 0\right] - \left[e^{-x}\right]_0^1 = -\dfrac{1}{e} - \left[\left(e^{-1}\right) - 1\right] = 1 - \dfrac{2}{e}$.

2. a. Pour tout entier naturel non nul n, f_n est positive sur [0 ; 1]. On peut donc interpréter géométriquement I_n comme l'aire délimitée par la courbe C_n, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Les représentations graphiques données permettent alors de conjecturer le fait que la suite (I_n) semble décroissante.

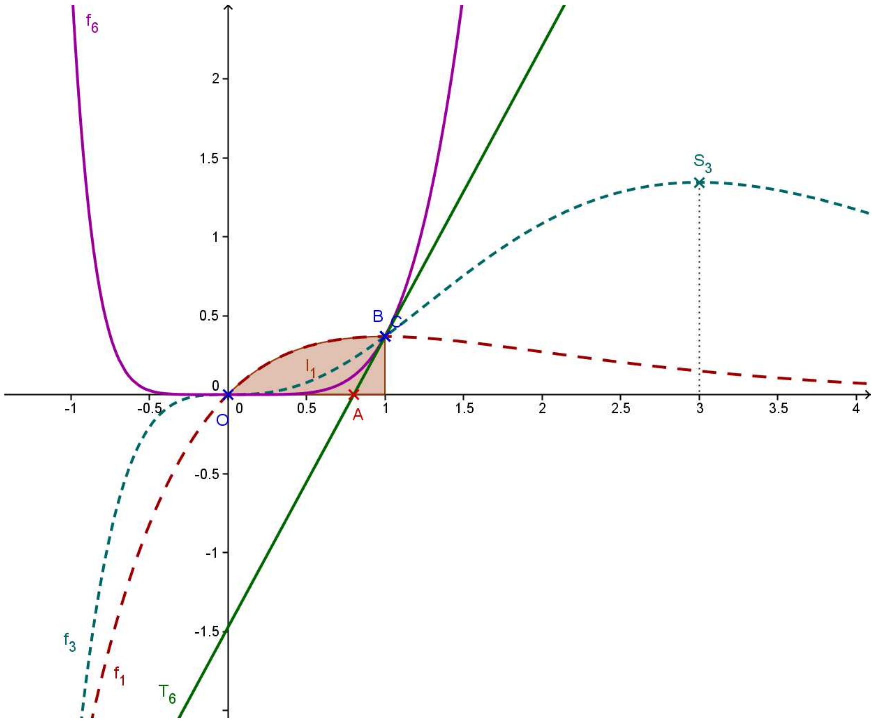
b. $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}\,dx - \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx \underbrace{=}_{\text{par linéarité}} \int_0^1 x^{n+1}e^{-x} - x^n e^{-x}\,dx = \int_0^1 (x-1)x^n e^{-x}\,dx$;

sur [0 ; 1], $(x-1)x^n e^{-x} \leq 0$ donc, par $\displaystyle\int_0^1 (x-1)x^n e^{-x}\,dx \leq 0 \Leftrightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0 I_{n+1} \leq I_n$, la suite (I_n) est décroissante.

c. Sur [0 ; 1], $f_n(x) \geq 0$, donc $I_n \geq 0$.

La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 : elle est donc convergente.

d. $0 \le x \le 1$, $-1 \le -x \le 0$, $e^{-1} \le e^{-x} \le e^{0}$ et $x^n e^{-1} \le x^n e^{-x} \le x^n$; par passage à l'intégrale dans la 2[ième] inégalité, il vient : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\, dx \le \int_0^1 x^n\, dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. On a donc $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$; comme $\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes donne : $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.



4. *Exercice 4 (5 points, non spécialistes)*

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Partie A – Restitution organisée de connaissances

On désigne par (P) le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et par M_0 le point de coordonnées $(x_0\,;y_0\,;z_0)$.

On appelle H le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan (P).

On suppose connue la propriété suivante :

Propriété : Le vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$ est un vecteur normal au plan (P).

Le but de cette partie est de démontrer que la distance $d(M_0, P)$ du point M_0 au plan (P), c'est-à-dire la distance M_0H, est telle que $d(M_0, P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

1. Justifier que $|\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}| = M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

2. Démontrer que $\vec{n}.\overrightarrow{M_0H} = -ax_0-by_0-cz_0-d$.

3. Conclure.

Partie B

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives (4 ; 1 ; 5), (−3 ; 2 ; 0), (1 ; 3 ; 6), (−7 ; 0 ; 4).

1. a. Démontrer que les points A, B, C définissent un plan (P) et que ce plan a pour équation cartésienne $x+2y-z-1=0$.

b. Déterminer la distance d du point F au plan (P).

2. Le but de cette question est de calculer la distance d par une autre méthode.

On appelle (Δ) la droite qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan (P).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point F sur le plan (P).

c. Retrouver le résultat de la question 1. b.

3. Soit (S) la sphère de centre F et de rayon 6.

a. Justifier que le point B appartient à la sphère (S).

b. Préciser le centre et déterminer le rayon du cercle (C), intersection de la sphère (S) et du plan (P).

Correction

Partie A

H étant le projeté orthogonal de M sur le plan, les vecteurs n et M H sont colinéaires donc :

1. La formule $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ du produit scalaire donne :

$$\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}=\|\vec{n}\|\times\left\|\overrightarrow{M_0H}\right\|\times\cos\left(\vec{n};\overrightarrow{M_0H}\right)=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times M_0H\times\cos\left(\vec{n};\overrightarrow{M_0H}\right)$$ d'où :

$$\left|\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}\right|=\left|\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times M_0H\times\cos\left(\vec{n};\overrightarrow{M_0H}\right)\right|$$

$$\underbrace{=}_{|xy|=|x||y|}\left|\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right|\times\left|M_0H\right|\times\left|\cos\left(\vec{n};\overrightarrow{M_0H}\right)\right|\underbrace{=}_{x\geq 0\Rightarrow|x|=x}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times M_0H\times\left|\cos\left(\vec{n};\overrightarrow{M_0H}\right)\right|\ ;$$

mais H étant le projeté orthogonal de M_0 sur le plan, les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{M_0H}$ sont colinéaires donc $\cos\left(\vec{n};\overrightarrow{M_0H}\right)=\pm 1$ d'où finalement $\left|\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}\right|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times M_0H$.

2. La forme analytique du produit scalaire donne : $\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}=a\left(x_H-x_0\right)+b\left(y_H-y_0\right)+c\left(z_H-z_0\right)$

$$=\left(ax_H+by_H+cz_H\right)-\left(ax_0+by_0+cz_0\right)\underbrace{=}_{H\in(P)}-d-\left(ax_0+by_0+cz_0\right)=-ax_0-by_0-cz_0-d.$$

3. On déduit de ce qui précède que :

$$\left|\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}\right|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times M_0H\ ,$$

$$\left|\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}\right|=\left|-ax_0-by_0-cz_0-d\right|=\left|-\left(ax_0+by_0+cz_0+d\right)\right|\underbrace{=}_{|-x|=|x|}\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|\ ;$$

D'où $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times M_0H=\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|\Leftrightarrow M_0H=\dfrac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=d\left(M_0;(P)\right)$.

Partie B

A(4 ; 1 ; 5), B(−3 ; 2 ; 0), C(1 ; 3 ; 6) et F(−7 ; 0 ; 4).

1. a. On a : $\overrightarrow{AB}\left(-7;1;-5\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(-3;2;1\right)$; Les coordonnées de ces vecteurs n'étant pas proportionnelles, les vecteurs ne sont pas colinéaires, les points A, B et C définissent donc un plan.

Les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation $x+2y-z-1=0$ qui est l'équation cartésienne d'un plan. On en déduit qu'il s'agit d'une équation du plan (ABC).

Autre méthode(plus longue à mettre en œuvre) : on peut aussi retrouver cette équation en recherchant un vecteur normal, donc orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (ou en vérifiant que le vecteur de coordonnées (1 ; 2 ;

-1) est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$) et en utilisant un des points A, B ou C pour trouver la constante correspondant.

b. $d = d(F;(P)) = \dfrac{|ax_F + by_F + cz_F + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{|1\times(-7)+2\times 0+(-1)\times 4-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \dfrac{|-12|}{\sqrt{6}} = \dfrac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$.

2. a. (Δ) étant la droite passant par le point F et perpendiculaire au plan (P) admet tout vecteur normal à (P) pour un vecteur directeur donc notamment $\vec{n}(1;2;-1)$.

Et, $M(x;y;z)\in(\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{FM} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x+7 = k\times 1 \\ y = k\times 2 \\ z-4 = k\times(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7+k \\ y = 2k \\ z = 4-k \end{cases}$ où $k \in$ ρ.

b. H est le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (P). Ses coordonnées vérifient donc :

$$H(x;y;z)\in(\Delta)\cap(P) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=-7+k \\ y=2k \\ z=4-k \end{cases} \\ x+2y-z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-7+k)+2\times 2k-(4-k)-1=0 \\ \begin{cases} x=-7+k \\ y=2k \\ z=4-k \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ \begin{cases} x=-5 \\ y=4 \\ k=2 \end{cases} \end{cases};$$

Donc H(−5 ; 4 ; 2).

c. On a $d = FH = \sqrt{(-5-(-7))^2+(4-0)^2+(2-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ (on retrouve bien le même résultat !).

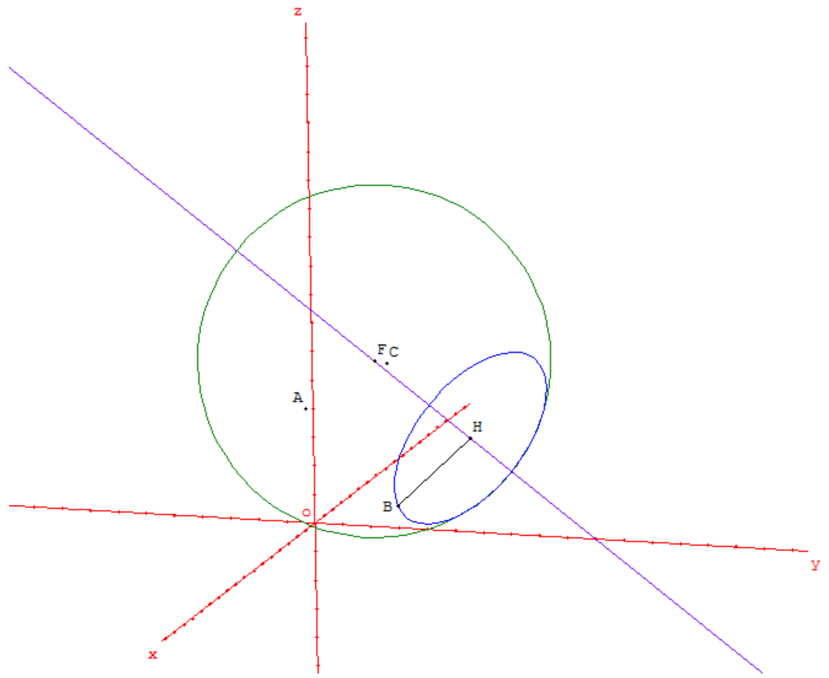
3. a. *Méthode 1 :* $FB = \sqrt{(-3-(-7))^2+(2-0)^2+(0-4)^2} = \sqrt{36} = 6$; B est donc un point de S.

Méthode 2 : S a pour équation : $(x + 7)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 36$; les coordonnées de B vérifient cette équation, B est donc un point de S.

b. L'intersection entre (S) et (P) est bien un cercle (C) car $d = d(F;(P)) = 2\sqrt{6}\left(=\sqrt{24}\right) < 6\left(=\sqrt{36}\right)$;

Le centre du cercle d'intersection est le projeté orthogonal de F sur le plan, c'est donc H.
Le point B étant sur le cercle recherché (car appartenant et à (S) et à (P)), le rayon est égal à :

$HB = \sqrt{(-3-(-5))^2+(2-4)^2+(0-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.



5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

PARTIE A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de BÉZOUT et le théorème de GAUSS.

Théorème de BÉZOUT : Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs vérifiant $au + bv = 1$.

Théorème de GAUSS : Soient a, b, c des entiers relatifs. Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

1. En utilisant le théorème de BÉZOUT, démontrer le théorème de GAUSS.

2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux.

Déduire du théorème de GAUSS que, si a est un entier relatif, tel que $a \equiv 0[p]$ et $a \equiv 0[q]$, alors $a \equiv 0[pq]$.

PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs n vérifiant le système : $\begin{cases} n \equiv 9[17] \\ n \equiv 3[5] \end{cases}$.

1. Recherche d'un élément de S.

On désigne par $(u ; v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.

a. Justifier l'existence d'un tel couple $(u ; v)$.

b. On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$. Démontrer que n_0 appartient à S.

c. Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à S.

2. Caractérisation des éléments de S.

a. Soit n un entier relatif appartenant à S. Démontrer que $n - n_0 \equiv 0[85]$.

b. En déduire qu'un entier relatif n appartient à S si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.

3. Application

Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons.

Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9.

Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3. Combien a-t-elle de jetons ?

Correction