

## Polynésie

---

### 1. Exercice 1 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

1. Soient A le point d'affixe  $2 - 5i$  et B le point d'affixe  $7 - 3i$ .

Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.

2. Soit (C) l'ensemble des points M d'affixe  $z$  telle que  $|z - i| = |z + 2i|$ .

Proposition 2 : (C) est une droite parallèle à l'axe des réels.

3. Soit  $z = 3 + i\sqrt{3}$ .

Proposition 3 : Pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $z^{3n}$  est imaginaire pur.

4. Soit  $z$  un nombre complexe non nul.

Proposition 4 : Si  $\frac{\pi}{2}$  est un argument de  $z$  alors  $|i + z| = 1 + |z|$ .

5. Soit  $z$  un nombre complexe non nul.

Proposition 5 : Si le module de  $z$  est égal à 1 alors  $z^2 + \frac{1}{z^2}$  est un nombre réel.

### Correction

### 2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.

On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

- $G_n$  l'évènement « le joueur gagne la  $n$ -ième partie » ;
- $p_n$  la probabilité de l'évènement  $G_n$ .

On a donc  $p_1 = 0,1$ .

- Montrer que  $p_2 = 0,62$ . On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
- Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
- Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
- Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$ .
- Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ .
- Déterminer la limite de la suite  $(p_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- Pour quelles valeurs de l'entier naturel  $n$  a-t-on :  $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$  ?

### Correction

### 3. Exercice 3 (5 points, spécialistes)

---

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

Si  $p$  est un nombre premier et  $a$  est un entier naturel non divisible par  $p$ , alors  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

On considère la suite  $(u_n)$  d'entiers naturels définie par :  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 10u_n + 21$ .

1. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
  2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $3u_n = 10^{n+1} - 7$ .  
b. En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , l'écriture décimale de  $u_n$ .
  3. Montrer que  $u_2$  est un nombre premier.
- On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite  $(u_n)$  par certains nombres premiers.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.
  5. a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $3u_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$ .  
b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  n'est pas divisible par 11.
  6. a. Démontrer l'égalité :  $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ .  
b. En déduire que, pour tout entier naturel  $k$ ,  $u_{16k+8}$  est divisible par 17.

### Correction

### 4. Exercice 3 (5 points)

---

#### Partie A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

- Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions continues sur un intervalle  $[a ; b]$ . Pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ ,

$$\int_a^b \alpha u(x) + \beta v(x) dx = \alpha \int_a^b u(x) dx + \beta \int_a^b v(x) dx.$$

- Si  $u$  désigne une fonction continue sur un intervalle  $[a ; b]$  et  $U$  une primitive de  $u$  sur  $[a ; b]$ , alors

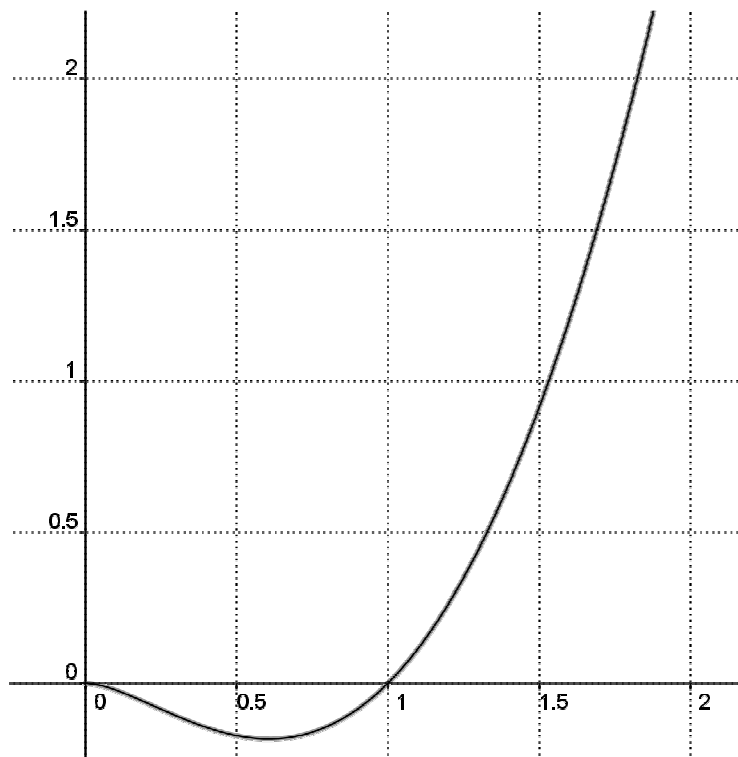
$$\int_a^b u(x) dx = [U(x)]_a^b = U(b) - U(a).$$

En utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle  $[a ; b]$ , démontrer la formule d'intégration par parties.

#### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = x^2 \ln x$ .

La courbe (C) représentative de la fonction  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée ci-dessous.



1. a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

b. Étudier les variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

2. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer qu'il existe une tangente unique à la courbe (C) passant par O. Préciser une équation de cette tangente.

3. On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe (Ox) de la région plane délimitée par la courbe (C), l'axe (Oy) et les droites d'équations  $x = \frac{1}{e}$  et  $x = 1$ . On note  $V$  une mesure, exprimée en unités de volume, du volume

de ce solide et on admet que :  $V = \int_{1/e}^1 \pi [f(x)]^2 dx$ .

a. Montrer qu'une primitive de la fonction  $x \rightarrow x^4 \ln x$  sur  $]0; +\infty[$  est la fonction  $x \rightarrow \frac{x^5}{25} (5 \ln x - 1)$ .

b. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que :  $V = \frac{\pi}{125} \left( 2 - \frac{37}{e^5} \right)$ .

### Correction

### 5. Exercice 4 (5 points)

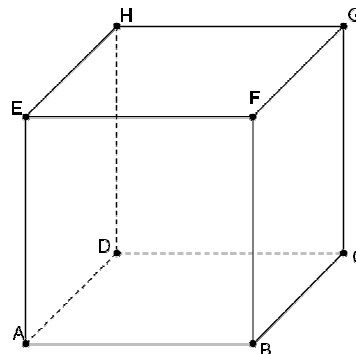
On considère le cube ABCDEFGH de côté 1 représenté ci-contre.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal  $(D ; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ .

On note K le barycentre des points pondérés (D, 1) et (F, 2).

#### Partie A

1. Montrer que le point K a pour coordonnées  $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ .
2. Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.
3. Calculer la distance EK.



#### Partie B

Soit M un point du segment [HG].

On note  $m = HM$  ( $m$  est donc un réel appartenant à  $[0 ; 1]$ ).

1. Montrer que, pour tout réel  $m$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; 1]$ , le volume du tétraèdre EMFD, en unités de volume, est égal à  $\frac{1}{6}$ .
2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MFD) est  $(-1 + m)x + y - mz = 0$ .
3. On note  $d_m$  la distance du point E au plan (MFD).
  - a. Montrer que, pour tout réel  $m$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; 1]$ ,  $d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}$ .
  - b. Déterminer la position de M sur le segment [HG] pour laquelle la distance  $d_m$  est maximale.
  - c. En déduire que lorsque la distance  $d_m$  est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD).

### Correction