Antilles - Guyane

1. Exercice 1 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x\ln x-1$.

Partie A : Étude d'une fonction

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

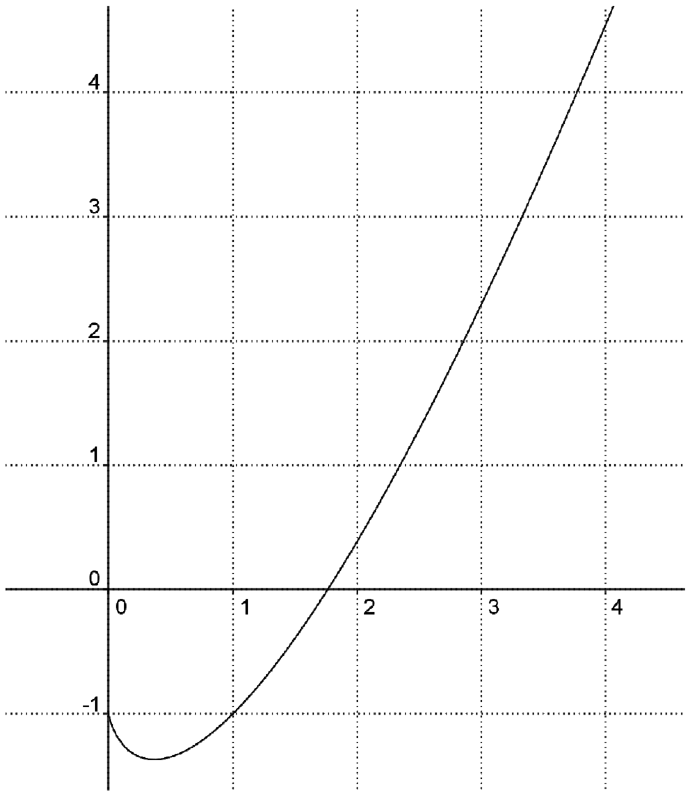
2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$.

En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$. On note α cette solution. Déterminer un encadrement de α à la précision 10^{-2}.

4. Déterminer le signe de $f(x)$ lorsque x appartient à $]0\,;+\infty[$.

5. Montrer que $\ln\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$.



Partie B : Calcul d'une intégrale

On donne ci-contre la courbe C, représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé. On considère l'intégrale suivante :

$$I=\int_{\alpha}^{4} f(x)\,dx.$$

1. Justifier que l'intégrale I est l'aire d'une partie du plan que l'on hachurera sur le graphique.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $J=\displaystyle\int_{\alpha}^{4} x\ln x\,dx$.

3. Montrer l'égalité : $I=\dfrac{1}{4}\alpha^2+\dfrac{1}{2}\alpha+16\ln 2-8$.

En déduire une valeur approchée de I à 10^{-1} près.

2. Exercice 2 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

Partie A

On note P le point d'affixe $p=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, Q le point d'affixe $q=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et K le point d'affixe -1.

1. a. Montrer que les points P et Q appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 1.

b. Faire une figure et construire les points P et Q.

2. a. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $|z|=|z+1|$. Représenter cet ensemble sur la figure.

b. Montrer que P et Q sont les points d'intersection de l'ensemble D et du cercle Γ.

Partie B

On considère trois nombres complexes non nuls a, b et c. On note A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c.

On suppose que l'origine O du repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est à la fois le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

1. a. Montrer que $|a|=|b|=|c|$. En déduire que $\left|\frac{b}{a}\right|=\left|\frac{c}{a}\right|=1$.

b. Montrer que $a+b+c=0$.

c. Montrer que $\left|\frac{b}{a}\right|=\left|\frac{b}{a}+1\right|=1$.

d. En utilisant la partie A, en déduire que $\frac{b}{a}=p$ ou $\frac{b}{a}=q$.

2. Dans cette question, on admet que $\frac{b}{a}=p$ et $\frac{b}{a}=q$.

a. Montrer que $\frac{q-1}{p-1}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b. Montrer que $\frac{q-1}{p-1}=\frac{c-a}{b-a}$.

c. Déduire des deux questions précédentes la nature du triangle ABC.

3. Exercice 3 (5 points, non spécialistes)

Les parties A et B sont indépendantes

Un site internet propose des jeux en ligne.

Partie A

Pour un premier jeu :

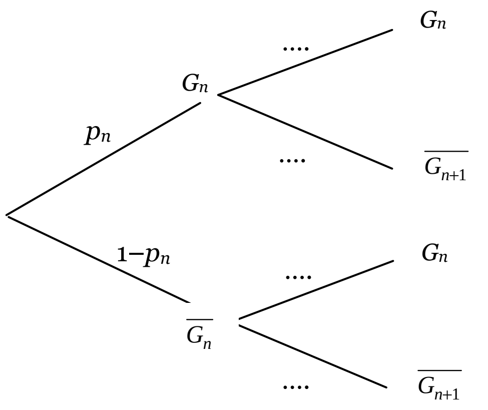
* si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$.

* si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.

L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul,

$p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n+\frac{1}{5}$.

3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n=p_n-\frac{1}{4}$.

a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.

b. Donner une expression de u_n en fonction de n puis de p_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de p_n.

Partie B

Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties. On suppose que toutes les parties sont indépendantes.

La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.

c. Déterminer l'espérance de X.

2. Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €.

a. Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.

b. Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 €. Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près.

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les trois points *A*, *B* et *C* de coordonnées respectives : *A* (–1 ; 2 ; 1), *B* (1 ; –6 ; –1) et *C* (2 ; 2 ; 2).

1. a. Vérifier que les points *A*, *B* et *C* définissent bien un plan.

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}=(1\,;1\,;-3)$ est un vecteur normal au plan (*ABC*).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (*ABC*).

2. Soit P le plan d'équation : $x-y+z-4=0$.

a. Montrer que les plans (*ABC*) et P sont sécants.

b. Soit D la droite intersection des plans P et (*ABC*). Déterminer une représentation paramétrique de la droite D.

3. On considère la sphère S de centre Ω (3 ; 1 ; 3) et de rayon 3 et on nomme *I* le point de coordonnées (2 ; –1 ; 1).

On admet que la droite D a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+t \\ y=-3+2t,\ t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$.

a. Montrer que le point *I* appartient à la droite D.

b. Montrer que le point *I* appartient à la sphère S.

c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que la droite D coupe la sphère S en un deuxième point.

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère l'ensemble P des points *M*(*x* ; *y* ; *z*) de l'espace tels que : $z=x^2+y^2$.

Les trois questions sont indépendantes.

1. a. Montrer que l'intersection de l'ensemble P et du plan d'équation *z* = 5 est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Déterminer la nature de l'intersection de l'ensemble P et du plan d'équation *y* = 1.

2. On considère la sphère S de centre *O* et de rayon $\sqrt{6}$.

a. Donner une équation de la sphère S.

b. Montrer que l'intersection de la sphère S et de l'ensemble P est un cercle.

3. Le but de cette question est de déterminer les points *M*(*x* ; *y* ; *z*) de l'ensemble P, dont les coordonnées sont des entiers relatifs, appartenant au plan d'équation $-3x+2y=1$ et vérifiant $z\le 25$.

a. Donner un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E) : $-3x+2y=1$.

b. Déterminer l'ensemble des couples (*x* ; *y*) d'entiers relatifs solutions de l'équation (E). Déterminer les points de l'ensemble P dont les coordonnées (*x* ; *y* ; *z*) sont des entiers relatifs vérifiant : $-3x+2y=1$ et $z\le 25$.