Terminale S septembre 2011

Polynésie

1. *Exercice 1 (5 points)*

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

– « À quel niveau est votre bureau ? »

– « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

– 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1er niveau, 75 vont au 2^{e} niveau et 100 vont au 3^{e} niveau.

– Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2^{e} niveau, les autres vont au 1er niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.

On pourra considérer les évènements suivants :

– N_1 : « La personne va au premier niveau. »

– N_2 : « La personne va au deuxième niveau. »

– N_3 : « La personne va au troisième niveau. »

– E : « La personne emprunte l'escalier. »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. a. Montrer que la probabilité que la personne aille au 2^{e} niveau par l'escalier est égale à $\dfrac{1}{12}$.

b. Montrer que les évènements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.

c. Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2^{e} niveau.

3. On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2^{e} niveau.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2^{e} niveau.

c. En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2^{e} niveau ?

4. Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins un personne va au 2^{e} niveau » soit supérieure ou égale à 0,99.

2. *Exercice 2 (4 points)*

Partie A

On rappelle que pour tous les points E et F de l'espace, $EF^2 = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EF}$.

Soient A et B deux points distincts de l'espace et I le milieu de $[AB]$.

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace, on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{1}{2}AB^2$.

2. Déterminer la nature de l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que $MA^2 + MB^2 = AB^2$.

Partie B

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives : $3x+4y+z-1=0$ et $x-2y-z+5=0$ et les points A et B de coordonnées respectives $(-1\,;0\,;4)$ et $(3\,;-4\,;2)$.

1. Montrer que les plans (P) et (Q) sont sécants.

On nomme (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q).

a. Montrer que le point A appartient à la droite (D).

b. Montrer que $\vec{u}(1\,;-2\,;5)$ est un vecteur directeur de la droite (D).

c. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (D).

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit (E) l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA^2 + MB^2 = AB^2$.

Déterminer l'ensemble des points d'intersection de (E) et de la droite (D). On précisera les coordonnées de ces points.

3. Exercice 3 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2-3i$, $z_B = i$ et $z_C = 6-i$.

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Partie A

1. Calculer $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

2. En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{i(z-2+3i)}{z-i}.$$

1. Soit D le point d'affixe $z_D = 1-i$. Déterminer l'affixe du point D' image du point D par f.

2. a. Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par l'application f est le point d'affixe $2i$.

b. Démontrer que E est un point de la droite (AB).

3. Démontrer que, pour tout point M distinct du point B, $OM' = \dfrac{AM}{BM}$.

4. Démontrer que, pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{AM}\right) + \dfrac{\pi}{2}$ à 2π près.

5. Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

6. Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

Corrigé (Polynésie, septembre 2011)

Partie A

1. $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{i-2+3i}{6-i-2+3i} = \dfrac{-2+4i}{4+2i} = \dfrac{-2+4i}{4+2i}\dfrac{4-2i}{4-2i} = \dfrac{20i}{20} = i$.

2. $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{AB}{AC} = |i| = 1$. Le triangle ABC est donc rectangle et isocèle en A.

Partie B

1. $z_{D'} = \dfrac{i(1-i-2+3i)}{1-i-i} = \dfrac{-2-i}{1-2i} = \dfrac{(-2-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{-5i}{5} = -i$.

2. a. On cherche z tel que $2i = \dfrac{i(z-2+3i)}{z-i} \Leftrightarrow 2i(z-i) = i(z-2+3i) \Leftrightarrow 2z-2i = z-2+3i \Leftrightarrow z = -2+5i$.

b. $\overrightarrow{AE}$ a pour affixe $-2+5i-2+3i = -4+8i$, $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $i-2+3i = -2+4i$ donc $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$, les points A, B, E sont alignés.

3. $z' = i\dfrac{z - z_A}{z - z_B}$ d'où en passant au module : $|z'| = |i|\dfrac{|z - z_A|}{|z - z_B|} \Leftrightarrow OM' = 1 \times \dfrac{AM}{BM}$.

4. En prenant l'argument, on a : $\arg(z') = \arg(i) + \arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \dfrac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right)[2\pi]$.

5. Si M est sur la médiatrice de $[AB]$, alors on a $AM = BM$ donc $OM' = 1$: M' appartient au cercle de centre O, de rayon 1.

6. Si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, alors $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = 0$ ou $\pi[2\pi]$: les points A, B, M sont alignés, le point M appartient à la droite (AB).

4. Exercice 4 (6 points)

Partie A Question de cours

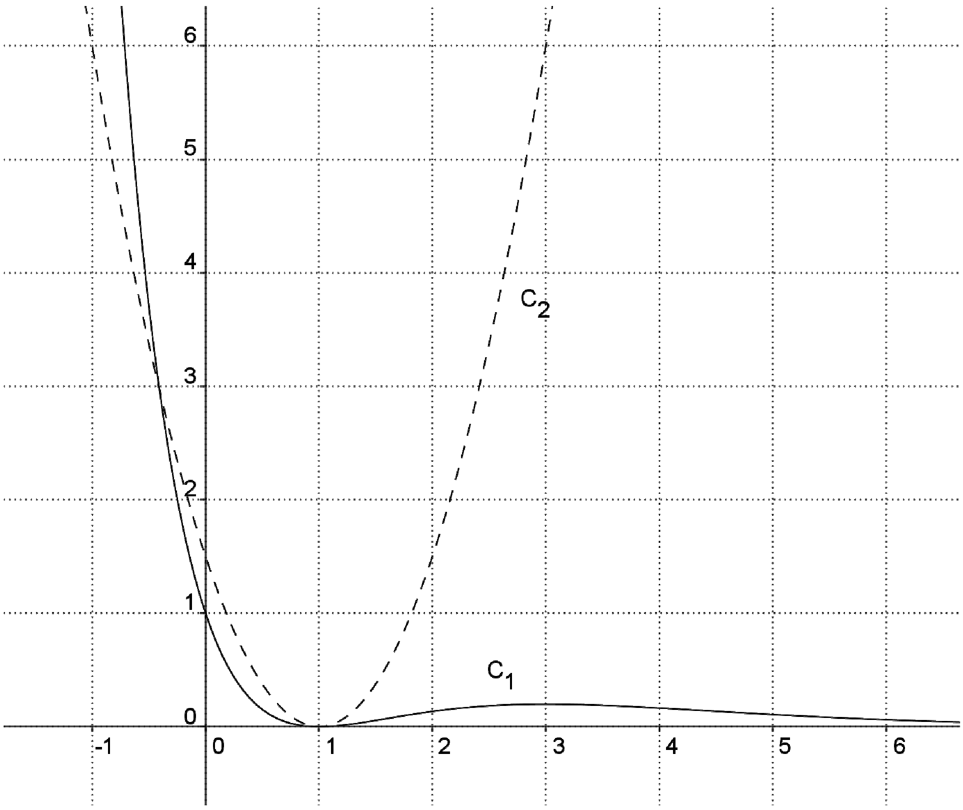
Soit I un intervalle de P. Soient u et v deux fonctions continues, dérivables sur I telles que les fonctions dérivées u' et v' soient continues sur I.

Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\,;\,b]$ de I.

Partie B

On considère les fonctions f et g définies sur P par : $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$ et $g(x) = \dfrac{3}{2}(x-1)^2$.

On note respectivement C_1 et C_2 les courbes représentatives de f de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$. Les courbes sont tracées ci-dessous.



1. a. Déterminer les coordonnées des points communs à C_1 et C_2.

b. Donner les positions relatives de C_1 et C_2 sur P.

2. a. À l'aide de deux intégrations par parties successives, déterminer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

b. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_1, C_2 et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \int_0^1 (x-1)^{2n} e^{-x}\,dx$.

1. a. Démontrer que, pour tout x de $[0\,;1]$ et pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq (x-1)^{2n} e^{-x} \leq (x-1)^{2n}$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2n+1}$.

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.