

## Nouvelle - Calédonie

### 1. Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra 1 cm pour unité graphique.

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - 2z + 2 = 0$ .

2. Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives :  $z_A = 1 + i$  ;  $z_B = \overline{z_A}$  ;  $z_C = 2z_B$  ;  $z_D = 3$ .

Construire une figure et la compléter tout au long de l'exercice.

3. Montrer que les trois points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre D dont on précisera le rayon.

4. Calculer  $\frac{z_C - 3}{z_A - 3}$ . En déduire la nature du triangle DAC.

5. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On note  $h$  l'homothétie de centre D et de rapport 2. On note  $r$  la rotation de centre D et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . On appelle  $C'$  l'image de C par  $h$  et  $C''$  l'image de  $C'$  par  $r$ .

Montrer que les droites (AC) et  $(C'C'')$  sont perpendiculaires.

### 2. Exercice 2 (5 points)

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - x$ .

a. Déterminer les limites de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

b. Montrer que la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ .

c. Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  appartenant à  $]0; +\infty[$  tel que  $f(\alpha) = 0$ . Déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près.

2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ .

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par  $u_0 = 1,5$  et pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = g(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$ .

On a représenté ci-dessous la courbe  $C$  représentative de la fonction  $g$  et la droite d'équation  $y = x$ .

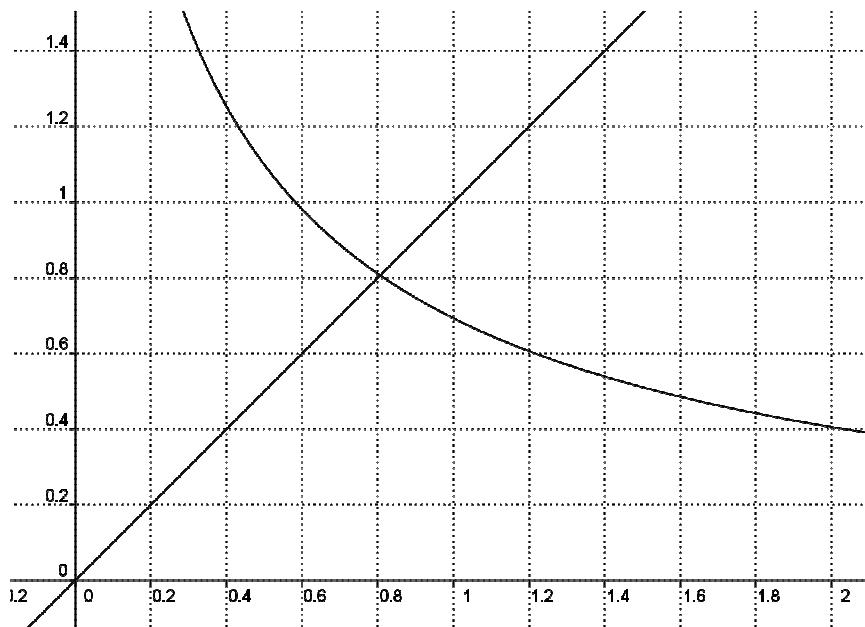
a. Construire sur l'axe des abscisses, en laissant les traits de construction apparents, les cinq premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

b. Le graphique permet-il d'émettre les conjectures suivantes ? On recopiera sur la copie le numéro de la conjecture suivie de OUI ou NON. Aucune justification n'est demandée.

- Conjecture n° 1 : « la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone. »
- Conjecture n° 2 : « la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 0,5. »
- Conjecture n° 3 : « la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 1. »

c. On admet que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente vers une limite  $L$  strictement positive. Montrer que  $\ln\left(1 + \frac{1}{L}\right) = L$ .

d. Montrer que  $L = \alpha$ .



### 3. Exercice 3 (5 points)

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ».

Soit  $X$  la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement du réseau, exprimé en heures.

On admet que  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Le paramètre  $\lambda$  est un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel  $t \geq 0$ ,  $P(0 \leq X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ .

1. On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à 0,6.

Montrer qu'une valeur approchée de  $\lambda$  à  $10^{-3}$  près est 0,131.

Dans les questions suivantes, on prendra 0,131 pour valeur approchée de  $\lambda$  et les résultats seront donnés à  $10^{-2}$  près.

2. Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à 0,52.

3. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.

4. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.

5. On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants.

Soit  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.

a. Quelle est la loi suivie par  $Y$ ?

b. Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures.

c. Calculer l'espérance mathématique de  $Y$  (on arrondira à l'entier le plus proche).

### 4. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points : A(0 ; 0 ; 2), B(0 ; 4 ; 0) et C(2 ; 0 ; 0).

1. a. Vérifier qu'une équation du plan (ABC) est :  $2x + y + 2z = 4$ .

b. Calculer la distance du point O au plan (ABC).

2. a. Déterminer une équation du plan (P) passant par A et orthogonal à la droite (BC).

b. Soit  $(\delta)$  la droite intersection du plan (P) et du plan (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(\delta)$ . Quel rôle joue cette droite dans le triangle ABC?

3. a. Soit  $(\delta')$  la médiane issue de B du triangle ABC.

Montrer qu'une équation paramétrique de  $(\delta')$  dans le triangle ABC est : 
$$\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 4t, t \in [0, 1] \\ z = t \end{cases}$$

b. Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle.

4. Soit H le point d'intersection des droites  $(\delta)$  et  $(\delta')$ . Montrer que le point H a pour coordonnées  $\left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}; \frac{8}{9}\right)$ .

Que représente le point H pour le triangle ABC ?

5. Montrer que le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC). Retrouver alors la distance du point O au plan (ABC).

#### 5. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère la surface (S) d'équation :  $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ .

1. a. Montrer que si le point  $M(x; y; z)$  appartient à (S) alors le point  $M'(-x; -y; -z)$  appartient aussi à (S). Que peut-on en déduire ?

b. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (xOy). On admet de même que la surface (S) est symétrique par rapport aux plans (xOz) et (yOz).

2. a. Déterminer la nature géométrique de la section de la surface (S) par le plan (xOy). Préciser ses éléments caractéristiques.

b. Soit  $k$  un réel non nul. Déterminer la nature géométrique de la section de la surface (S) par le plan d'équation  $z = k$ . Préciser ses éléments caractéristiques.

3. Déterminer la nature géométrique de la section de la surface (S) par le plan d'équation  $y = 2$ .

4. On considère les points  $A(2\sqrt{2}; 0; 2)$  et  $B(0; 2\sqrt{2}; -2)$ .

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

b. La droite (AB) est-elle contenue dans la surface (S) ?

5. Identifier parmi les trois figures proposées ci-dessous celle qui représente la surface (S).

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la figure et justifiera la réponse.

6. Soit (H) la section de la surface (S) par le plan (P) d'équation  $y = 5$ .

a. Montrer qu'un point  $M(x; y; z)$  appartient à (H) si et seulement si  $(x - z)(x + z) = -21$  et  $y = 5$ .

b. En déduire les coordonnées des points de (H) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

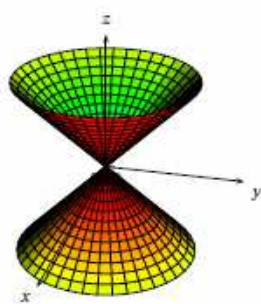


Figure 1

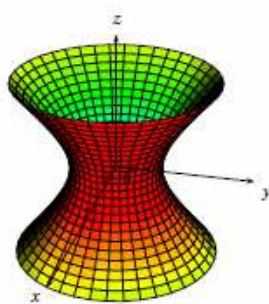


Figure 2

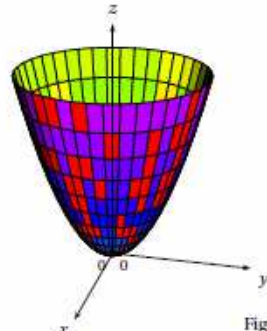


Figure 3