

## France métropolitaine

### 1. Exercice 1 (4 points)

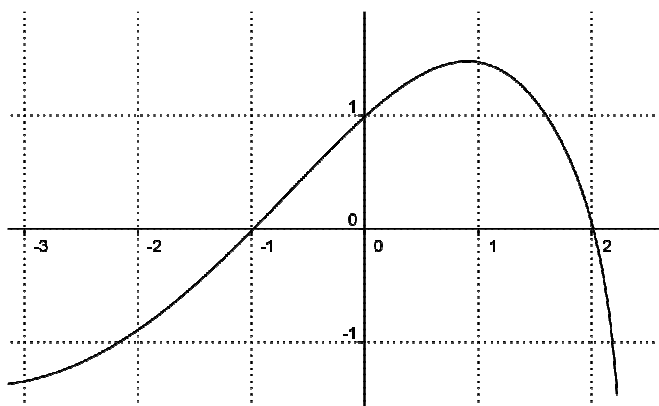
Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère une fonction  $f$  dérivable sur l'intervalle  $[-3 ; 2]$ .

On dispose des informations suivantes :

\*  $f(0) = -1$ .

\* la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  admet la courbe représentative C ci-dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[-3 ; -1]$ ,  $f'(x) \leq 0$ .

2. La fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[-1 ; 2]$ .

3. Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[-3 ; 2]$ ,  $f(x) \geq -1$ .

4. Soit  $X$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .

La tangente à la courbe  $X$  au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées  $(1 ; 0)$ .

### 2. Exercice 2 (5 points)

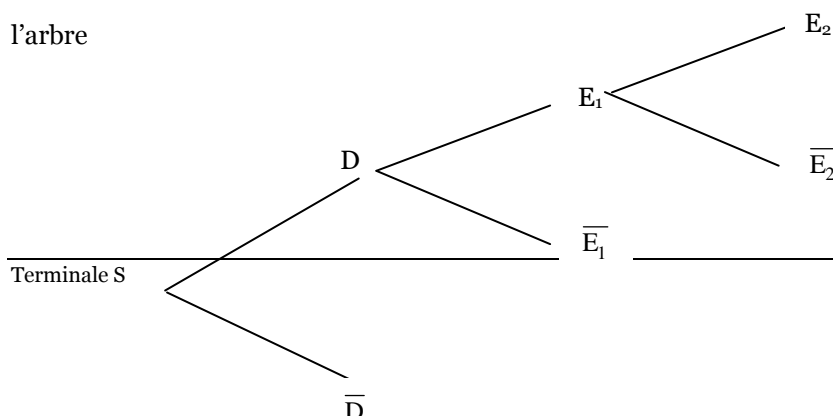
Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante : le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier ; 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

On considère les événements suivants :

- $D$  : « Le candidat est retenu sur dossier »,
- $E_1$  : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
- $E_2$  : « Le candidat est recruté ».

l'arbre



a. Reproduire et compléter pondéré ci-dessous.

b. Calculer la probabilité de l'évènement  $E_1$ .

c. On note  $F$  l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».

Démontrer que la probabilité de l'évènement  $F$  est égale à 0,93.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les uns des autres.

On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.

On désigne par  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

a. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à  $10^{-3}$ .

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999 ?

### 3. Exercice 3 (6 points)

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

#### Partie A

On désigne par  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ .

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

2. Démontrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[1; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$ .

Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ . En déduire le signe de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ .

#### Partie B

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier strictement positif par  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ .

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables	$i$ et $n$ sont des entiers naturels $u$ est un réel
Entrée	Demander à l'utilisateur la valeur de $n$
Initialisation	Affecter à $u$ la valeur 0
Traitement	Pour $i$ variant de 1 à $n$ Affecter à $u$ la valeur $u + \frac{1}{i}$
Sortie	Afficher $u$

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur  $n = 3$ .

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de  $u_n$  lorsque l'utilisateur entre la valeur de  $n$ .

3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à  $10^{-3}$ .

$n$	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	1500	2000
$u_n$	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite  $(u_n)$  et son éventuelle convergence.

### Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.

Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite  $(u_n)$  telle que pour tout entier strictement positif  $n$ ,  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ .

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = f(n)$  où  $f$  est la fonction définie dans la partie A. En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

2. a. Soit  $k$  un entier strictement positif. Justifier l'inégalité  $\int_k^{k+1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx \geq 0$ .

En déduire que  $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$ . Démontrer l'inégalité  $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$  (1).

b. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement  $k$  par  $1, 2, \dots, n$  et démontrer que pour tout entier strictement positif  $n$ ,  $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ .

c. En déduire que pour tout entier strictement positif  $n$ ,  $u_n > 0$ .

3. Prouver que la suite  $(u_n)$  est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

### 4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On appelle  $f$  l'application qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  différente de  $-1$ , fait correspondre le point  $M'$  d'affixe  $\frac{1}{z+1}$ .

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par  $f$  de la droite  $\Delta$  d'équation  $x = -\frac{1}{2}$ .

1. Soient  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $z_A = -\frac{1}{2}$ ,  $z_B = -\frac{1}{2} + i$  et  $z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ .

a. Placer les trois points  $A, B$  et  $C$  sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique.

b. Calculer les affixes des points  $A' = f(A)$ ,  $B' = f(B)$  et  $C' = f(C)$  et placer les points  $A', B'$  et  $C'$  sur la figure.

c. Démontrer que les points  $A', B'$  et  $C'$  ne sont pas alignés.

2. Soit  $g$  la transformation du plan qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , fait correspondre le point  $M_1$  d'affixe  $z+1$ .

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $g$ .

b. Sans donner d'explication, placer les points  $A_1, B_1$  et  $C_1$ , images respectives par  $g$  de  $A, B$  et  $C$  et tracer la droite  $\Delta_1$ , image de la droite  $\Delta$  par  $g$ .

c. Démontrer que  $\Delta_1$  est l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  telle que  $|z-1| = |z|$ .

3. Soit  $h$  l'application qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  non nulle, associe le point  $M_2$  d'affixe  $\frac{1}{z}$ .

a. Justifier que  $h(A_1) = A', h(B_1) = B'$  et  $h(C_1) = C'$ .

b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul  $z$ , on a :  $\left| \frac{1}{z} - 1 \right| = 1 \Leftrightarrow |z - 1| = |z|$ .

c. En déduire que l'image par  $h$  de la droite  $\Delta_1$  est incluse dans un cercle  $X$  dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure. On admet que l'image par  $h$  de la droite  $\Delta_1$  est le cercle  $X$  privé de  $O$ .

4. Déterminer l'image par l'application  $f$  de la droite  $\Delta$ .

#### 5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

---

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ .

On désigne par  $A$ ,  $B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $z_A = -1 + i$ ,  $z_B = 2i$  et  $z_C = 1 + 3i$  et  $\Delta$  la droite d'équation  $y = x + 2$ .

1. Prouver que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  appartiennent à la droite  $\Delta$ .

Sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique, placer les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et tracer la droite  $\Delta$ .

2. Résoudre l'équation  $(1 + i)z + 3 - i = 0$  et vérifier que la solution de cette équation est l'affixe d'un point qui n'appartient pas à la droite  $\Delta$ .

Dans la suite de l'exercice, on appelle  $f$  l'application qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  différente de  $-1 + 2i$ , fait correspondre le point  $M'$  d'affixe  $\frac{1}{(1 + i)z + 3 - i}$ .

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par  $f$  de la droite  $\Delta$ .

3. Soit  $g$  la transformation du plan qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , fait correspondre le point  $M_1$  d'affixe  $z_1 = (1 + i)z + 3 - i$ .

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $g$ .

b. Calculer les affixes des points  $A_1$ ,  $B_1$  et  $C_1$ , images respectives par  $g$  des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

c. Déterminer l'image  $\Delta_1$  de la droite  $\Delta$  par la transformation  $g$  et la tracer sur la figure.

4. Soit  $h$  l'application qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  non nulle, fait correspondre le point  $M_2$  d'affixe  $\frac{1}{z}$ .

a. Déterminer les affixes des points  $h(A_1)$ ,  $h(B_1)$  et  $h(C_1)$  et placer ces points sur la figure.

b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul  $z$ , on a :  $\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |z - 2| = |z|$ .

c. En déduire que l'image par  $h$  de la droite  $\Delta_1$  est incluse dans un cercle  $X$  dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.

d. Démontrer que tout point du cercle  $X$  qui est distinct de  $O$  est l'image par  $h$  d'un point de la droite  $\Delta_1$ .

5. Déterminer l'image par l'application  $f$  de la droite  $\Delta$ .