Amérique du Nord

1. Exercice 1 (5 points)

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhère à la section tennis. On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

Partie A

On choisit au hasard unmembre de cette association et on note :

- F l'événement « le membre choisi est une femme »,

- T l'événement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

1. Montrer que la probabilité de l'événemen F est égale à $\frac{2}{5}$.

2. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.

Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

Partie B

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.

a. Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y a ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

b. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

Montrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.

c. Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geq 0,99$.

2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 € chacun, les autres ne rapportent rien.

Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 € par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.

On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

2. Exercice 2 (5 points)

Partie A. Restitution organisée des connaissances

On rappelle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$. On note X sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Soit g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

Montrer que la fonction g est positive sur $[1\,;+\infty[$.

2. a. Montrer que, pour tout x de $[1\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

b. En déduire le sens de variation de f sur $[1\,;+\infty[$.

c. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe X.

d. Étudier la position de la courbe X par rapport à la droite Δ.

3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de X et Δ.

a. Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k=\dfrac{\ln k}{k}$.

b. Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieur ou égale à 10^{-2}.

3. Exercice 3 (5 points)

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0\,;1]$ telle que : $f(0)=0$ et $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout x de $[0\,;1]$.

On ne cherchera pas à déterminer f.

Partie A

1. Déterminer le sens de variation de f sur $[0\,;1]$.

2. Soit g la fonction définie sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$ par $g(x)=f(\tan x)$.

a. Justifier que g est dérivable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, puis que, pour tout x de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, $g'(x)=1$.

b. Montrer que, pour tout x de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, $g(x)=x$, en déduire que $f(1)=\dfrac{\pi}{4}$.

3. Montrer que, pour tout x de $[0\,;1]$, $0\le f(x)\le\dfrac{\pi}{4}$.

Partie B

Soit (I_n) la suite définie par $I_0=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, $I_0=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2$.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n\ge 0$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n\le\dfrac{\pi}{4(n+1)}$.

c. En déduire la limite de la suite (I_n).

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application f du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=z^2$.

On note Ω le point d'affixe 1.

1. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $f(M)=M$.

2. Soit A le point d'affixe $a=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

a. Exprimer a sous forme exponentielle.

b. En déduire les affixes des deux antécédents de A par f.

3. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M′ soit un nombre imaginaire pur.

4. Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω pour lesquels le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle direct en Ω.

a. À l'aide de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$,montrer que M est un point de Γ_3 si et seulement si $z^2-iz-1+i=0$ et $z\neq 1$.

b. Montrer que $z^2-iz-1+i=(z-1)(z+1-i)$.

c. En déduire l'ensemble Γ_3.

5. Soit M un point d'affixe z différente de 0 et de 1.

a. Exprimer $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right)$ en fonction d'un argument de z.

b. En déduire l'ensemble Γ_4 des points M distincts de O et de Ω tels que O, M et M′ soient alignés.

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit S la transformation du plan qui, à tout M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' telle que : $z'=5iz+6i+4$.

Partie A

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristique de la transformation S.

2. On note x et x', y et y' les parties réelles et imaginaires respectives de z et z'.

Démontrer que : $\begin{cases} x'=-5y+4 \\ y'=5x+6 \end{cases}$.

Partie B

Dans cette partie, on se place dans le cas où les coordonnées x et y du point M sont des entiers relatifs tels que $-3\leq x\leq 5$ et $-3\leq y\leq 5$.

On note E l'ensemble de ces points M.

1. a. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(a ; b)$ tels que $4a+3b=5$.

b. En déduire l'ensemble des points M de E de coordonnées $(x ; y)$ tels que $-3x'+4y'=37$.

2. Soit M un point de l'ensemble E et M′ son image par la transformation S.

a. Démontrer que $x'+y'$ est un multiple de 5.

b. Démontrer que $x'-y'$ et $x'+y'$ sont congrus modulo 2.

En déduire que si $x'^2-y'^2$ estmultiple de 2 alors $x'-y'$ et $x'+y'$ le sont également.

c. Déterminer l'ensemble des points M de E tels que : $x'^2-y'^2=20$.