Antilles - Guyane

1. Exercice 1 (6 points)

Les parties B et C sont indépendantes.

On note P l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction *f* définie sur P par $f(x) = xe^{x-1} + 1$.

On note X sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de *f* en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe X ?

2. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

3. On admet que *f* est dérivable sur P, et on note f' sa fonction dérivée.

Montrer que, pour tout réel *x*, $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$.

4. Étudier les variations de *f* sur P et dresser son tableau de variation sur P.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit *a* un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe X au point d'abscisse *a*, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à X au point d'abscisse *a*. Donner une équation de T_a.

2. Démontrer qu'une tangente à X en un point d'abscisse *a* strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si *a* vérifie l'égalité $1 - a^2e^{a-1} = 0$.

3. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ de l'équation $1 - x^2e^{x-1} = 0$.

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

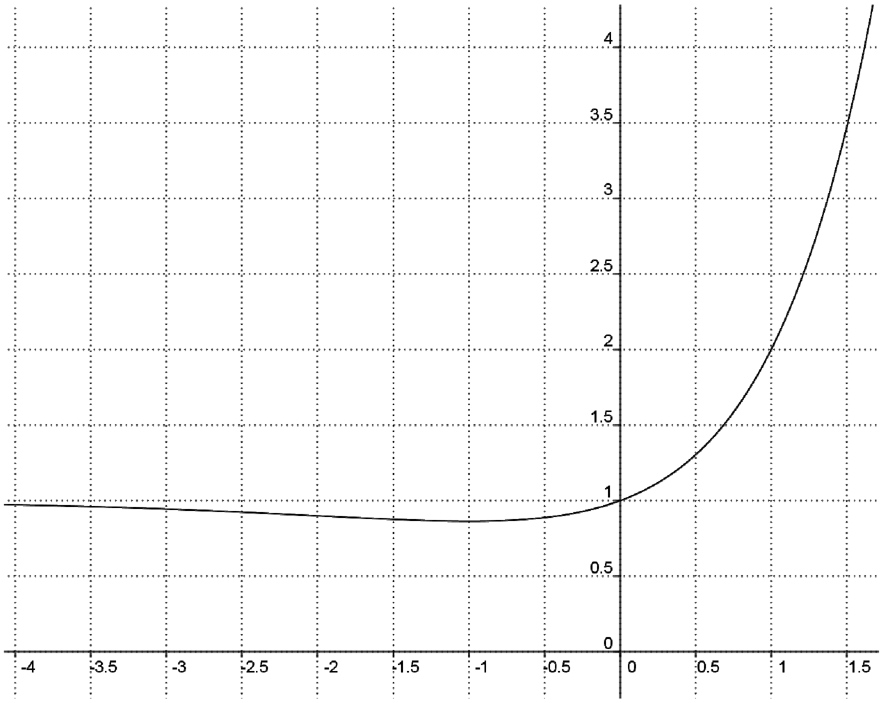
Partie C : calcul d'aire

Le graphique donné ci-dessous représente la courbe X de la fonction *f* dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Construire sur ce graphique la droite Δ d'équation $y = 2x$. On admet que la courbe X est au-dessus de la droite Δ. Hachurer le domaine D limité par la courbe X la droite Δ, la droite d'équation ($x = 1$) et l'axe des ordonnées.

2. On pose $I = \int_0^1 xe^{x-1}dx$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I = \frac{1}{e}$.

3. En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine D.



2. Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$.

On réalisera sur une feuille de papier millimétré une figure en prenant pour unité 2 cm. On complètera cette figure au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives $a=-1+2i$, $b=-2-i$, $c=-3+i$.

1. Placer les points A, B et C sur le graphique.

2. Calculer $\dfrac{b}{a}$. En déduire la nature du triangle OAB.

3. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z avec $z\neq b$, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=\dfrac{z+1-2i}{z+2+i}$.

a. Calculer l'affixe c' du point C', image de C par f et placer le point C' sur la figure.

b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z avec $z\neq b$, tels que $|z'|=1$.

c. Justifier que E contient les points O et C. Tracer E.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

On appelle J l'image du point A par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. On appelle K l'image du point C par la rotation r' de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On note L le milieu de [JK].

Démontrer que la médiane issue de O du triangle OJK est la hauteur issue de O du triangle OAC.

3. Exercice 3 (5 points)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_1=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\dfrac{n+1}{2n}u_n$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = \frac{u_n}{n}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{n}{2^n}$.

4. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln 2$.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité. Les cinq questions sont indépendantes.

1. Dans un lycée donné, on sait que 55 % des élèves sont des filles. On sait également que 35 % des filles et 30 % des garçons déjeunent à la cantine.

On choisit, au hasard, un élève du lycée. Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine ?

2. Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire 3 jetons simultanément. Combien de tirages différents peut-on faire contenant au moins un jeton à numéro pair ?

3. Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{1}{5}$.

Calculer la probabilité que Y soit supérieure ou égale à 2. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3}.

4. Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.

On appelle A l'évènement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'événement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».

On suppose que les évènements A et F sont indépendants.

On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0,02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0,069.

On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?

5. On considère l'algorithme :

Entrée	A et C sont des entiers naturels

Calculs	C prend la valeur 0
	Répéter 9 fois
	    A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7.
	        Si A > 5 alors C prend la valeur de C + 1
	        Fin Si
	Fin répéter

Sortie	Afficher C.

Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C affichée. Quelle loi suit la variable X ? Préciser ses paramètres.

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Les quatre questions sont indépendantes.

1. a. Vérifier que le couple (4 ; 6) est une solution de l'équation (E) $11x - 5y = 14$.

b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (x ; y) vérifiant l'équation (E).

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^{3n} \equiv 1[\bmod 7]$.

b. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7.

3. On se place dans le plan complexe. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i .$$

4. On considère l'algorithme suivant où $\text{Ent}\left[\frac{A}{N}\right]$ désigne la partie entière de $\frac{A}{N}$ (par exemple $\text{Ent}\left[\frac{37}{5}\right] = \text{Ent}[7,4] = 7$).

Entrée	A et N sont des entiers naturels Saisir A
Calculs	N prend la valeur 1 Tant que $\text{N} \leq \sqrt{\text{A}}$ Si $\frac{\text{A}}{\text{N}} - \text{Ent}\left[\frac{\text{A}}{\text{N}}\right] = 0$ alors Afficher N et $\frac{\text{A}}{\text{N}}$ Fin si N prend la valeur N + 1 Fin Tant que.

Quels résultats affiche cet algorithme pour A = 12 ?

Que donne cet algorithme dans le cas général ?