Asie

1. Exercice 1 (5 points)

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse correcte et justifiée rapporte 1 point.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la droite D dont on donne une représentation paramétrique, et le plan P dont on donne une équation cartésienne :

$$\mathrm{D}:\begin{cases} x=1-2t \\ y=t \\ z=-5-4t \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \quad \text{et P : } 3x+2y-z-5=0.$$

Affirmation 1 : la droite D est strictement parallèle au plan P.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le point A(1 ; 9 ; 0) et le plan P d'équation cartésienne : $4x-y-z+3=0$.

Affirmation 2 : la distance du point A au plan P est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Soit la fonction *f* définie pour tout réel *x* par : $f(x)=\dfrac{3}{1+e^{-2x}}$.

On note X la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère du plan.

Affirmation 3 : la courbe X admet deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses.

4. Pour tout réel *x*, on pose $F(x)=\displaystyle\int_1^x (2-t)e^{-t}dt$.

Affirmation 4 : $F(x)$ est négatif ou nul quelle que soit la valeur du réel *x* supérieur à 1.

5. On considère l'intégrale $I=\displaystyle\int_1^e t^2 \ln t\,dt$.

Affirmation 5 : la valeur exacte de l'intégrale *I* est : $\dfrac{2e^3+1}{9}$.

2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On note *r* la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

On considère le point A, d'affixe $z_{\mathrm{A}}=-\sqrt{3}+i$, le point A_1 d'affixe $z_{\mathrm{A}_1}=\overline{z_{\mathrm{A}}}$ où $\overline{z_{\mathrm{A}}}$ désigne le conjugué de z_{A}.

On note enfin B image du point A, par la rotation *r* et z_{B} l'affixe du point B.

1. a. Écrire le nombre complexe z_{A} sous forme exponentielle, puis placer les points A et A_1, dans le repère. On prendra 2 cm comme unité graphique.

b. Vérifier que $z_{\mathrm{B}}=2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ sous forme exponentielle, puis écrire le nombre complexe z_{B} sous forme algébrique. Placer alors le point B dans le même repère.

2. On considère le vecteur unitaire $\vec{w}$, tel que $\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)=\dfrac{\pi}{12}$, et la droite Δ passant par O et de vecteur directeur $\vec{w}$.

a. Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.

b. Tracer la droite Δ, puis démontrer que Δ est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right)$.

En déduire que les points A et B sont symétriques par rapport à la droite Δ.

3. On note B_1 le symétrique de B par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$ et B' l'image de B_1 par la rotation *r*. Démontrer que B' = A.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit C le point d'affixe $\sqrt{2}(1+i)$ et D le symétrique de C par rapport à la droite Δ.

Construire les points C et D, puis calculer l'affixe du point D.

3. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Partie A - Détermination d'une similitude directe

On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_B = -\sqrt{3} + i$.

1. a. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.

b. Placer les points A et B dans le repère. On prendra 1 cm comme unité graphique.

2. a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe *f* de centre O qui transforme le point A en B.

b. Préciser les éléments caractéristiques dc la similitude *f*.

Partie B - Étude d'une transformation

Le but de cette partie est d'étudier la transformation $g = s \circ f$ où *f* désigne la similitude définie dans la partie A et *s* la réflexion d'axe $(O\,;\vec{u})$.

1. Soit M un point quelconque du plan. On désigne par M' l'image du point M par la transformation *g*.

On note *z* et *z*' les affixes respectives des points M et M', et $\bar{z}$ celle du conjugué de *z*.

a. Démontrer l'égalité : $z' = e^{-\frac{i\pi}{6}}\bar{z}$.

b. On pose C = *g*(A) et D = *g*(C). Calculer les affixes respectives des points C et D, puis placer les points C et D sur la figure.

c. Quelle est la nature du triangle OAC ?

d. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la nature de la transformation $g \circ g$ et préciser ses éléments géométriques.

4. Exercice 3 (5 points)

Soit *k* un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient *k* boules noires et 3 boules blanches. Ces *k* + 3 boules sont indiscernables au toucher.

Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose *k* = 7. Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ail tiré deux boules de couleurs différentes.

Démontrer que $p = 0{,}42$.

2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

a. Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

b. Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.

c. Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un joueur joue une partie.

On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. a. Justifier l'égalité : $P(Y_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$.

b. Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k.

2. On note $E(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k.

On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $E(Y_k)$ est strictement positive.

Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

5. Exercice 4 (5 points)

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a Saisir un réel strictemenl positif non nul b ($b > a$) Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0

Traitement	TANTQUE $n < N$
	    Affecter à n la valeur $n+1$
	    Affecter à u la valeur $\frac{a+b}{2}$
	    Affecter à v la valeur $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$
	Affecter à a la valeur u
	Affecter à b la valeur v

Sortie	Afficher u, afficher v

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour

$$a = 4,\ b = 9 \text{ et } N = 2.$$

Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		

1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}.$$

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{v_n - u_n}{2}\right)^2$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq v_n$.

3. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

4. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.