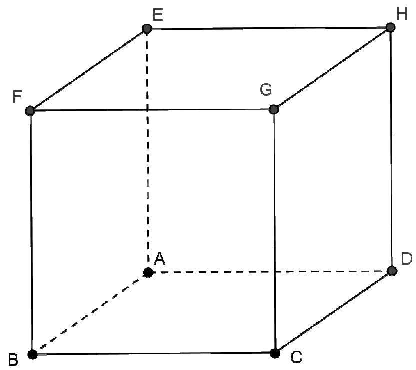
# Centres étrangers

## *1. Exercice 1 (4 points)*

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On se place dans le repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.




On considère les points $I\left(1\,;\frac{1}{3}\,;0\right)$, $J\left(0\,;\frac{2}{3}\,;1\right)$, $K\left(\frac{3}{4}\,;0\,;1\right)$ et $L(a\,;1\,;0)$ avec $a$ un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$.

*Les parties A et B sont indépendantes.*

**Partie A**

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$ .

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si $a = \frac{1}{4}$.

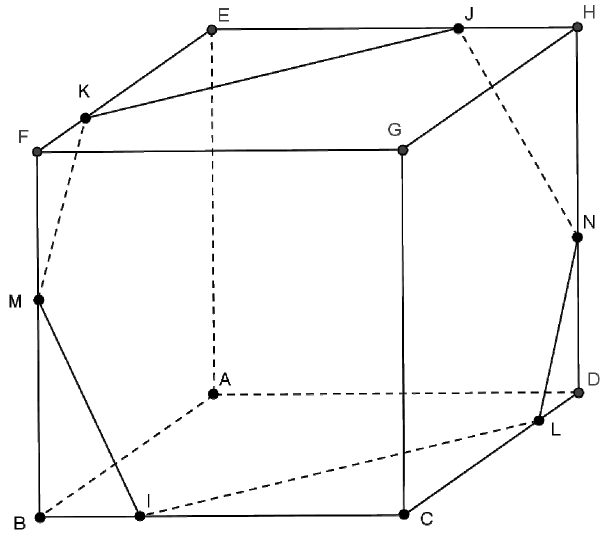
**Partie B**

Dans toute la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$. Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;1\,;0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).




*Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.*

a. Prouver que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (8 ; 9 ; 5) est un vecteur normal au plan (IJK).

b. En déduire que le plan (JJK) a pour équation $8x+9y+5z-11=0$.

c. En déduire les coordonnées des points M et N.

## ***2. Exercice 2 (5 points)***

On considère la suite $(I_n)$ définie pour $n$ entier naturel non nul par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$.

1. a. Soit $g$ la fonction définie sur P par $g(x) = xe^{x^2}$.

Démontrer que la fonction $G$ définie sur P par $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur P de la fonction $g$.

b. En déduire la valeur de $I_1$.

c. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier $n$, supérieur ou égal à 1, on a :
$I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$.

d. Calculer $I_3$ et $I_5$.

2. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Initialisation | Affecter à $n$ la valeur 1<br>Affecter à $u$ la valeur $\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$ |
| Traitement | Tant que $n$ < 21<br>Affecter à $u$ la valeur $\frac{1}{2}e-\frac{n+1}{2}$<br>Affecter à $n$ la valeur $n$ + 2 |
| Sortie | Afficher $u$ |

Quel terme de la suite $(I_n)$ obtient-on en sortie de cet algorithme ?

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, $I_n > 0$.

b. Montrer que la suite $\left( I_n \right)$ est décroissante.

c. En déduire que la suite $\left( I_n \right)$ est convergente. On note $L$ sa limite.

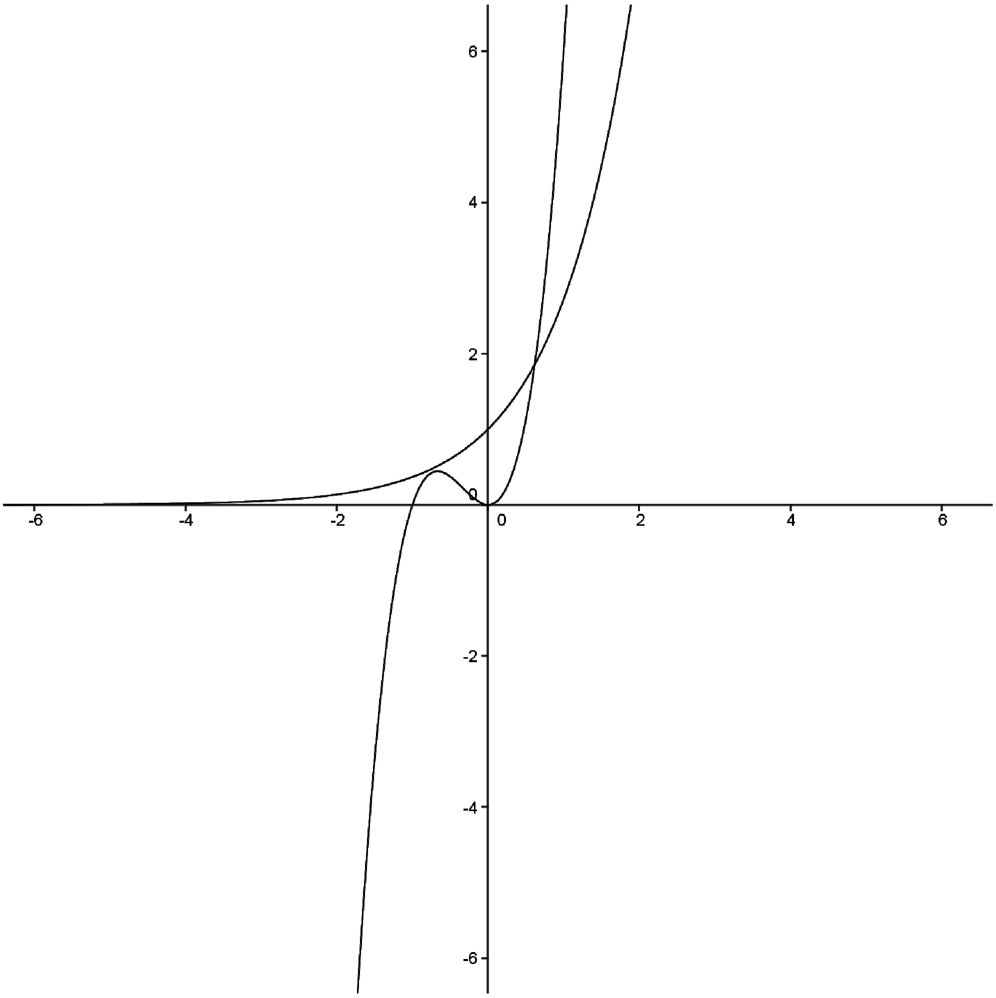
4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la valeur de $L$.

### *3. Exercice 3 (6 points, non spécialistes)*

On considère l'équation (E) d'inconnue $x$ réelle : $e^x = 3\left( x^2 + x^3 \right)$.

**Partie A : conjecture graphique**

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction $f$ définie sur P par $f(x) = 3\left( x^2 + x^3 \right)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.




À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

**Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique**

1. a. Étudier selon les valeurs de $x$, le signe de $x^2 + x^3$.

b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-1\right[$.

c. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E).

2. On considère la fonction $h$, définie pour tout nombre réel $x$ de $]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par :

$$h(x)=\ln 3+\ln\left(x^2\right)+\ln(1+x)-x.$$

Montrer que, sur $]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$, l'équation (E) est équivalente à l'équation $h(x)=0$.

3. a. Montrer que, pour tout nombre réel $x$ appartenant à $]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$, on a : $h'(x)=\dfrac{-x^2+2x+2}{x(x+1)}$.

b. Déterminer les variations de la fonction $h$.

c. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x)=0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.

4. Conclure quant à la conjecture de la partie A.

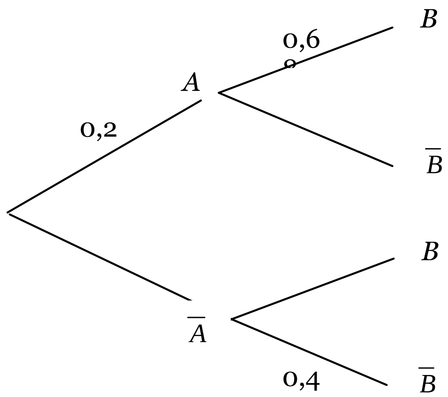
## *4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)*

*Les cinq questions sont indépendantes.*

*Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Toute trace de recherche sera valorisée.*

1. On considère l'arbre de probabilités suivant :

*Affirmation :* la probabilité de l'événement .4 sachant que l'événement $B$ est réalisé est égale à 0,32.




2. On considère une urne contenant $n$ boules rouges et trois boules noires, où $n$ désigne un entier naturel non nul. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hasard deux boules dans l'urne.

*Affirmation :* il existe une valeur de $n$ pour laquelle la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à $\dfrac{9}{22}$.

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère la transformation $t$ d'écriture complexe : $z'=-iz+5+i$.

*Affirmation :* la transformation $t$ est la rotation de centre A d'affixe $3-2i$ et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

4. Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation (E) d'inconnue $z$ : $z^2-z\overline{z}-1=0$.

*Affirmation* : l'équation (E) admet au moins une solution.

5. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixesrespectives $a=-1$, $b=i$, et $c=\sqrt{3}+i\left(1-\sqrt{3}\right)$.

*Affirmation :* le triangle ABC possède un angle dont une mesure est égale à 60°.

## *5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)*

*Les cinq questions sont indépendantes.*

*Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Toute trace de recherche sera valorisée.*

1. On considère l'équation (E) : $3x - 2y = 1$, où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.

*Affirmation* : les solutions de l'équation (E) sont les couples $(9 + 2k\,; 13 + 3k)$, avec $k$ appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

2. Soit $n$ un entier naturel. On considère les deux entiers $a$ et $b$ définis par : $a = 3n + 1$ et $b = 2n + 3$.

*Affirmation :* le PGCD de $a$ et $b$ est égal à 7 si et seulement si $n$ est congru à 2 module 7.

3. Soit $n$ un entier naturel. On considère les deux entiers $a$ et $b$ définis par : $a = 2n^2 + 7n + 21$ et $b = 2n + 2$.

*Affirmation* : pour tout entier naturel $n$, le quotient et le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$ sont respectivement égaux à $n + 2$ et à $n + 17$.

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère le point A d'affixe $3 + 4i$.

On note $s$ la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

*Affirmation* : la similitude directe réciproque $s^{-1}$ a pour écriture complexe : $z' = \frac{1 - i}{2} z + \frac{-1 + 7i}{2}$.

5. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 + 2i$, $b = 4 - i$, $c = 1 - 2\sqrt{3} + i\left(3 + \sqrt{3}\right)$ et $d = 4 + \sqrt{3} + 4i\sqrt{3}$.

*Affirmation* : la similitude directe qui transforme A en C et B en D a pour angle $\frac{\pi}{3}$.