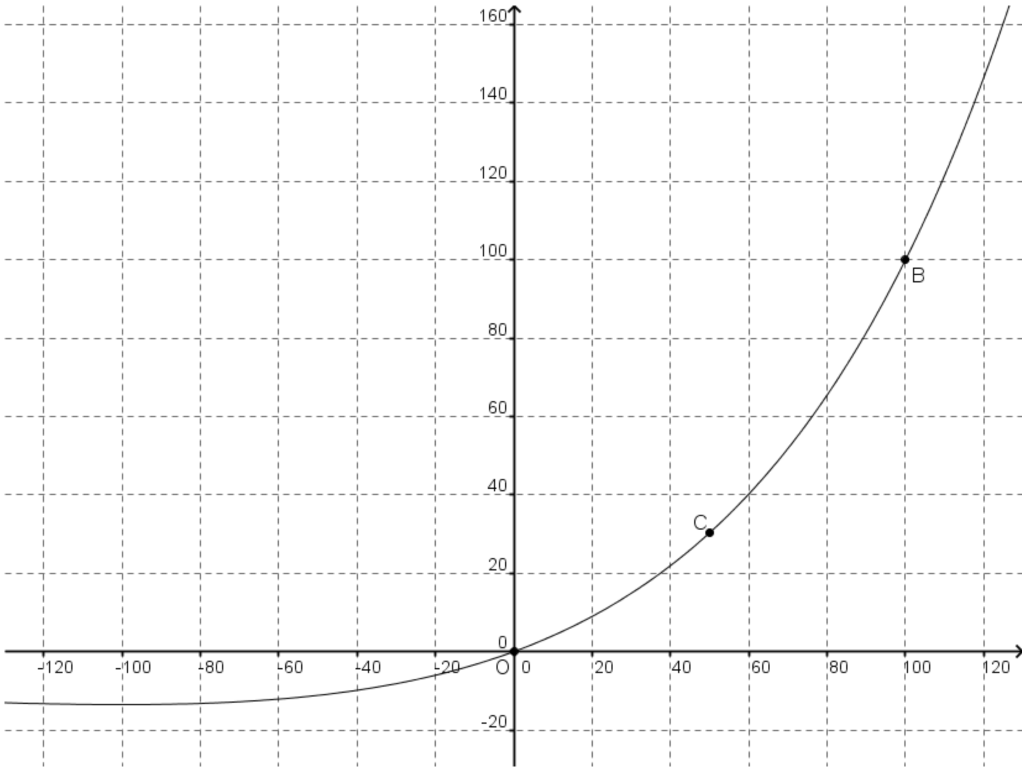
Polynésie

1. Exercice 1 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On considère les points B(100 ; 100) et $C\left(50\,;\frac{50}{\sqrt{e}}\right)$ et la droite (D) d'équation $y = x$.

On note *f* la fonction définie sur P dont la courbe représentative, notée (C) , est donnée ci-dessous.



On suppose de plus qu'il existe deux réels *a* et *b* tels que :

* pour tout *x* réel, $f(x) = xe^{ax+b}$;

* les points B et C appartiennent à la courbe (C).

1. a. Montrer que le couple (*a*, *b*) est solution du système : $\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

b. En déduire que pour tout *x* réel, $f(x) = xe^{0,01x-1}$.

2. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

3. a. Montrer que pour tout *x* réel $f(x) = \frac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x}$.

b. En déduire la limite de *f* en $-\infty$.

4. Étudier les variations de la fonction *f*. On donnera le tableau de variations complet.

5. Étudier la position relative de la courbe (C) et de la droite (D).

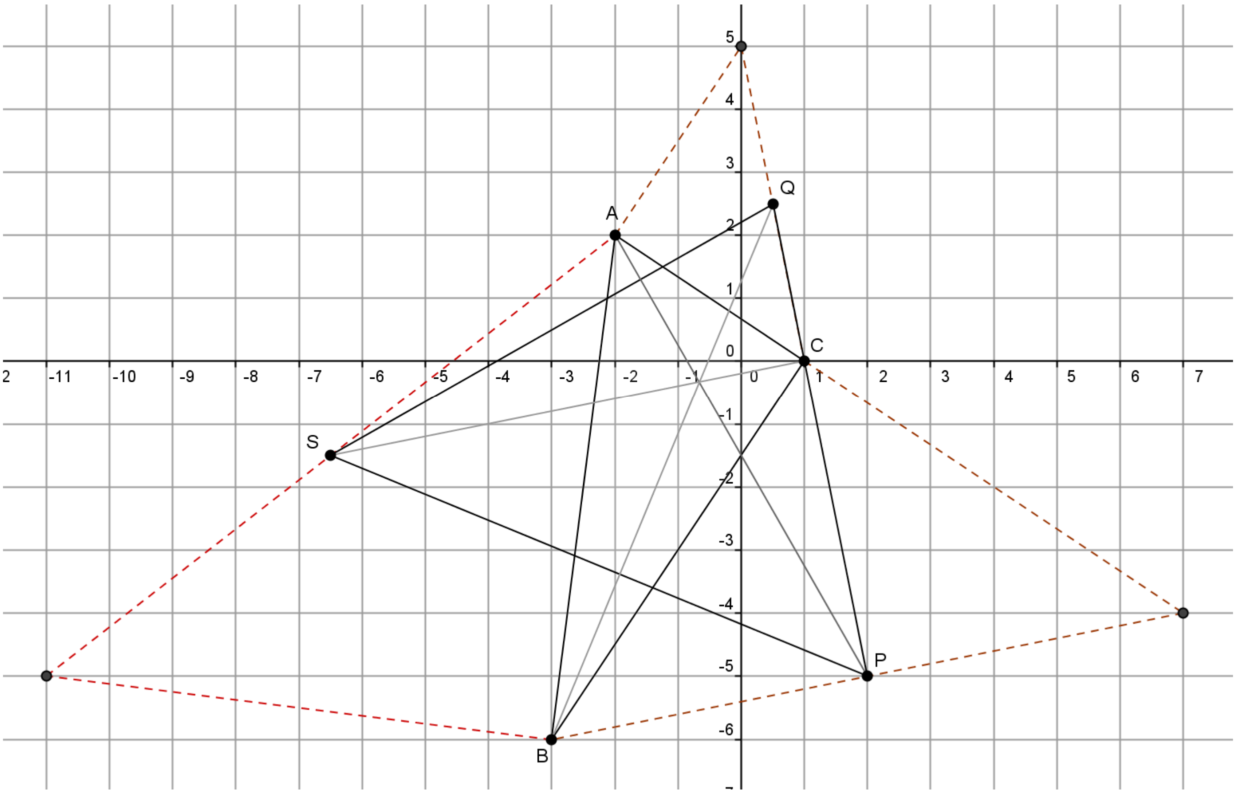
6. a. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\int_0^{100} f(t)\,dt$.

b. On désigne par A l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 100$, la droite (D) et la courbe (C). Calculer A.

2. Exercice 2 (5 points)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2 + 2i$, $b = -3 - 6i$ et $c = 1$.

La figure de l'exercice est donnée ci-dessous. Elle peut servir à émettre des conjectures ou à vérifier des résultats.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. a. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b. En déduire l'affixe du point A' image de A par r.

c. Vérifier que l'affixe s du point S milieu de [AA'] est $s = -\frac{13}{2} - \frac{3}{2}i$.

d. Démontrer que le point S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

3. On construit de la même manière C' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Q le milieu de [CC'], B' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et P le milieu de [BB'].

On admet que les affixes respectives de Q et de P sont $q = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$ et $p = 2 - 5i$.

a. Démontrer que $\frac{s-q}{p-a} = -i$.

b. En déduire que les droites (AP) et (QS) sont perpendiculaires et que les segments [AP] et [QS] sont de même longueur.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CS) sont concourantes.

3. Exercice 3 (5 points, non spécialistes)

Partie A

On considère l'algorithme suivant : les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée	Saisir le nombre entier naturel non nul N
Traitement	Affecter à U la valeur 0 Pour k allant de 0 à N – 1 Affecter à U la valeur 3U – 2k + 3 Fin pour
Sortie	Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque N = 3 ?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

5. Soit p un entier naturel non nul.

a. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$?

b. On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.

Justifier que $n_0 \leq 3p$.

c. Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.

d. Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n \geq 10^p$.

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle [0 ; 80].

Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.

Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Partie A : expérience 1

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à 0,12 + 0,004x.

2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.

3. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.

4. On suppose dans cette question que $x = 50$.

Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Partie B : expérience 2

On tire au hasard simultanément 3 cubes de l'urne.

Les résultats seront arrondis au millième.

1. Quelle est la probabilité de tirer au moins un cube rouge ?
2. Quelle est la probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur ?
3. Quelle est la probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle ?

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Partie A

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple (13, 3) est solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g - 108c = 1$.

On rappelle le petit théorème de Fermat : si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors a^{p-1} est congru à 1 modulo p, ce que l'on note $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

1. Soit x un entier naturel.

Démontrer que si $x \equiv a[7]$ et $x \equiv a[19]$ alors $x \equiv a[133]$.

2. a. On suppose que a n'est pas un multiple de 7.

Démontrer que $a^6 \equiv 1[7]$ puis que $a^{108} \equiv 1[7]$. En déduire que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[7]$.

b. On suppose que a est un multiple de 7. Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[7]$.

c. On admet que pour tout entier naturel a, $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[19]$. Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[133]$.

Partie C

On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \le a \le 26$.

Un message, constitué d'entiers appartenant à A, est codé puis décodé.

La phase de codage consiste à associer à chaque entier a de A, l'entier r tel que $a^{25} \equiv r[133]$ avec $0 \le r < 133$.

La phase de décodage consiste à associer à r, l'entier r_1 tel que $r^{13} \equiv r_1[133]$ avec $0 \le r_1 < 133$.

1. Justifier que $r_1 \equiv a[133]$.
2. Un message codé conduit à la suite des 2 entiers suivants : 128 et 59. Décoder ce message.