

**Liban****1. Exercice 1 (6 points)****Partie A**

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = 2x^3 - 1 + 2 \ln x$ .

1. étudier les variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
2. Justifier qu'il existe un unique réel  $\alpha$  tel que  $g(\alpha) = 0$ . Donner une valeur approchée de  $\alpha$ , arrondie au centième.
3. En déduire le signe de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

**Partie B**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$ .

On note X la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le plan, muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  orthogonal.

1. Déterminer les limites de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
  2. Démontrer que la courbe X admet pour asymptote oblique la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x$ .
- Étudier la position relative de la courbe X et de la droite  $\Delta$ .
3. Justifier que  $f'(x)$  a même signe que  $g(x)$ .
  4. En déduire le tableau de variation de la fonction  $f$ .
  5. Tracer la courbe X dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

**Partie C**

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine E du plan compris entre la courbe X, la droite  $\Delta$  et les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = n$ .

1. Justifier que cette aire, exprimée en  $\text{cm}^2$ , est donnée par :  $I_n = 2 \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$ .
2. a. Calculer l'intégrale  $I_n = 2 \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$  à l'aide d'une intégration par parties.
- b. En déduire l'expression de  $I_n$  en fonction de  $n$ .
3. Calculer la limite de l'aire  $I_n$  du domaine E quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**2. Exercice 2 (4 points)**

Les quatre questions sont indépendantes.

Dans cet exercice, pour chaque question, une affirmation est proposée. On demande d'indiquer sur la copie si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte, mais toute trace de recherche sera valorisée.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les droites  $D_1$  et  $D_2$  de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 6 + 2t, t \in \mathbb{R} \end{cases}, \text{ et } \begin{cases} x = 8 + 5t' \\ y = 2 - 2t' \\ z = 6 + t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

**Affirmation** : les droites  $D_1$  et  $D_2$  sont coplanaires.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(12 ; 7 ; -13)$  et  $B(3 ; 1 ; 2)$  ainsi que le plan  $P$  d'équation  $3x + 2y - 5z = 1$ .

**Affirmation** : le point  $B$  est le projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $P$ .

3. On considère les suites  $u$  et  $v$  définies, pour tout entier naturel  $n$ , par :  $u_n = \frac{n+1}{n+2}$  et  $v_n = 2 + \frac{1}{n+2}$ .

**Affirmation** : ces deux suites sont adjacentes.

4. On considère la suite  $u$  définie par son premier terme  $u_0 = 1$  et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

**Affirmation** : cette suite est majorée par 3.

### 3. Exercice 3 (5 points)

---

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ .

L'urne  $U_1$  contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.

L'urne  $U_2$  contient 4 boules blanches et 6 boules noires.

Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne  $U_1$ , à noter son numéro, puis à tirer simultanément de l'urne  $U_2$  le nombre de boules indiqué par le jeton.

On considère les événements suivants :

- $J_1$  : « le jeton tiré de l'urne  $U_1$  porte le numéro 1 »
- $J_2$  : « le jeton tiré de l'urne  $U_1$  porte le numéro 2 »
- $J_3$  : « le jeton tiré de l'urne  $U_1$  porte le numéro 3 »
- $J_4$  : « le jeton tiré de l'urne  $U_1$  porte le numéro 4 »
- $B$  : « toutes les boules tirées de l'urne  $U_2$  sont blanches »

On donnera tous les résultats sous la forme d'une fraction irréductible sauf dans la question 4.b. où une valeur arrondie à  $10^{-2}$  suffit.

1. Calculer  $P_{J_1}(B)$ , probabilité de l'événement  $B$  sachant que l'événement  $J_1$  est réalisé.

Calculer de même la probabilité  $P_{J_2}(B)$ . On admet dans la suite les résultats suivants :  $P_{J_3}(B) = \frac{1}{30}$  et

$$P_{J_4}(B) = \frac{1}{210}.$$

2. Montrer que  $P(B)$ , probabilité de l'événement  $B$ , vaut  $\frac{1}{7}$ .

3. On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 ?

4. On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note  $N$  la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de parties où toutes les boules tirées sont blanches.

- a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire  $N$  ?
- b. Calculer la probabilité de l'événement  $(N = 3)$ .

### 4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

---

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ .

1. Un triangle

a. On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a = 2$ ,  $b = 3 + i\sqrt{3}$  et  $c = 2i\sqrt{3}$ .

Déterminer une mesure de l'angle  $\widehat{ABC}$ .

b. En déduire que l'affixe  $\omega$  du centre  $\Omega$  du cercle circonscrit au triangle  $ABC$  est  $1 + i\sqrt{3}$ .

## 2. Une transformation du plan

On note  $(z_n)$  la suite de nombres complexes, de terme initial  $z_0 = 0$ , et telle que :  $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 2$ , pour tout entier naturel  $n$ . On note  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$ .

a. Montrer que les points  $A_2, A_3$  et  $A_4$  ont pour affixes respectives :  $3 + i\sqrt{3}$ ,  $2 + 2i\sqrt{3}$  et  $2i\sqrt{3}$ .

On remarquera que :  $A_1 = A$ ,  $A_2 = B$  et  $A_3 = C$ .

b. Comparer les longueurs des segments  $[A_1A_2]$ ,  $[A_2A_3]$  et  $[A_3A_4]$ .

c. Établir que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$  où  $\omega$  désigne le nombre complexe défini à la question 1. b.

d. En déduire que le point  $A_{n+1}$  est l'image du point  $A_n$  par une transformation dont on précisera les éléments caractéristiques.

e. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $A_{n+6} = A_n$ . Déterminer l'affixe du point  $A_{2012}$ .

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ , la longueur du segment  $[A_nA_{n+1}]$ .

## 5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ .

On note  $(z_n)$  la suite de nombres complexes, de terme initial  $z_0 = 0$ , et telle que :  $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n + 1$ , pour tout entier naturel  $n$ . On note  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$ .

1. Calculer les affixes des points  $A_1, A_2$  et  $A_3$ . Placer ces points dans le plan muni du repère  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ .

2. a. Montrer que le point  $A_{n+1}$  est l'image du point  $A_n$  par une similitude directe  $s$ , dont on définira le rapport, l'angle et le centre  $\Omega$ , d'affixe  $\omega$ .

b. Démontrer que le triangle  $\Omega A_n A_{n+1}$  est isocèle rectangle.

3. a. Établir que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $\Omega A_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$ .

b. À partir de quelle valeur de  $n$  les points  $A_n$  sont-ils situés à l'intérieur du disque de centre  $\Omega$  et de rayon 0,001 ?

4. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $a_n$  la longueur  $A_n A_{n+1}$  et  $L_n$  la somme  $\sum_{k=0}^n a_k$ .

$L_n$  est ainsi la longueur de la ligne polygonal  $A_0 A_1 \dots A_n A_{n+1}$ .

Déterminer la limite de  $L_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , les points  $A_n, \Omega$  et  $A_{n+4}$  sont alignés.