Nouvelle Calédonie

1. Exercice 1 (5 points)

Partie A

On considère le polynôme P défini sur X par $P(z)=z^3-\left(2+i\sqrt{2}\right)z^2+2\left(1+i\sqrt{2}\right)z-2i\sqrt{2}$.

1. Montrer que le nombre complexe $z_0=i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z)=0$.

2. a. Déterminer les réels a et b tels que $P(z)=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$.

b. En déduire les solutions dans X de l'équation $P(z)=0$.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives : $z_A=1+i$, $z_B=1-i$, $z_J=i\sqrt{2}$ et $z_K=e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

1. Placer les points A, B, J, K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.
3. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
4. Soit D le point d'affixe $z_D=-1+i$. On considère !a rotation r de centre O qui transforme J en D.

a. Déterminer une mesure de l'angle de la rotation r.
b. Soit C l'image du point L par la rotation r. Déterminer l'affixe du point C.
5. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier la réponse.

2. Exercice 2 (4 points)

On dispose de deux urnes et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire.
L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.
Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.
On considère les évènements suivants :
A : « obtenir 1 en lançant le dé »
B : « obtenir une boule noire ».
1. a. Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.

b. Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{3}{8}$.

c. Sachant que l'on a tiré une boule noire, calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.
2. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.
a. Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.
b. Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.
c. On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X<k)$	0,009 1	0,063 7	0,211 0	0,446 7	0,694 3	0,872 5	0,961 6	0,992 2	0,999 0	0,999 9

Soit N un entier compris entre 1 et 10. On considère l'évènement : « la personne gagne au moins N parties ».

À partir de quelle valeur de N la probabilité de cet évènement est-elle inférieure à $\frac{1}{10}$?

3. Exercice 3 (5 points, non spécialistes)

VRAI ou FAUX ? Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

1. Énoncé 1 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non constante de réels. Pour tout entier n, on pose $u_n = \sin(a_n)$.

Proposition 1 : «On peut choisir la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

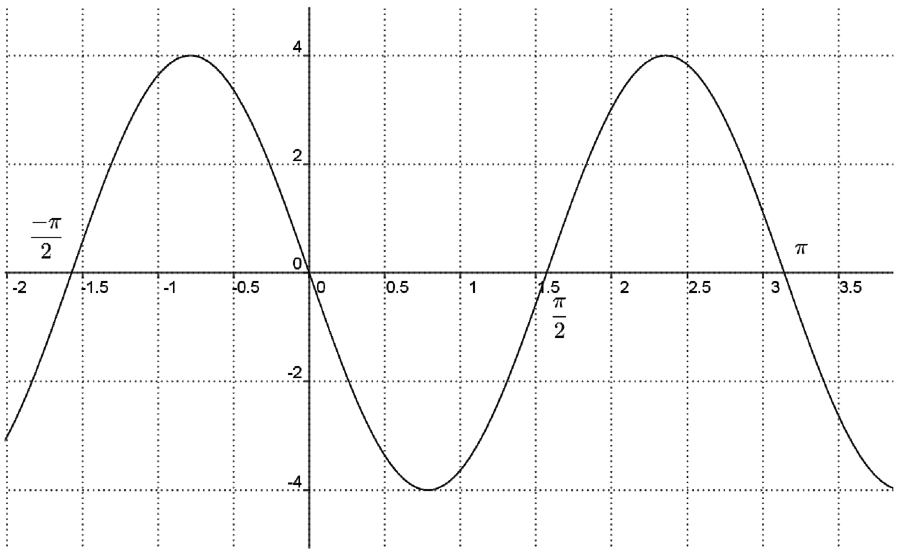
2. Énoncé 2 : Dans le plan complexe d'origine O, on considère, pour tout entier non nul n, les points M_n d'affixe $e^{i\frac{2n\pi}{3}}$.

Proposition 2 : « Les points O, M_1 et M_{20} sont alignés. »

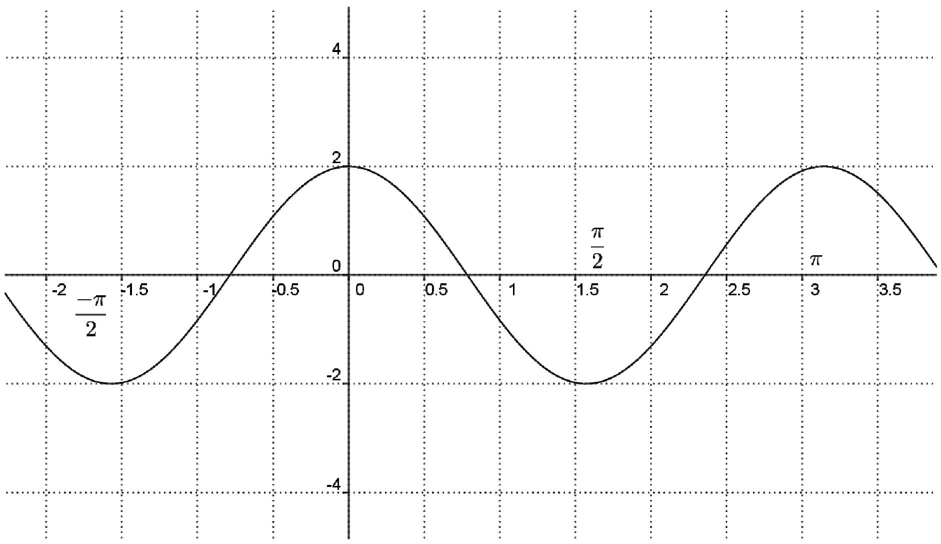
3. Énoncé 3 : On considère une fonction f, sa dérivée f' et son unique primitive F s'annulant en $x = 0$.

Les représentations graphiques de ces trois fonctions sont données (dans le désordre) par les courbes ci-dessous.

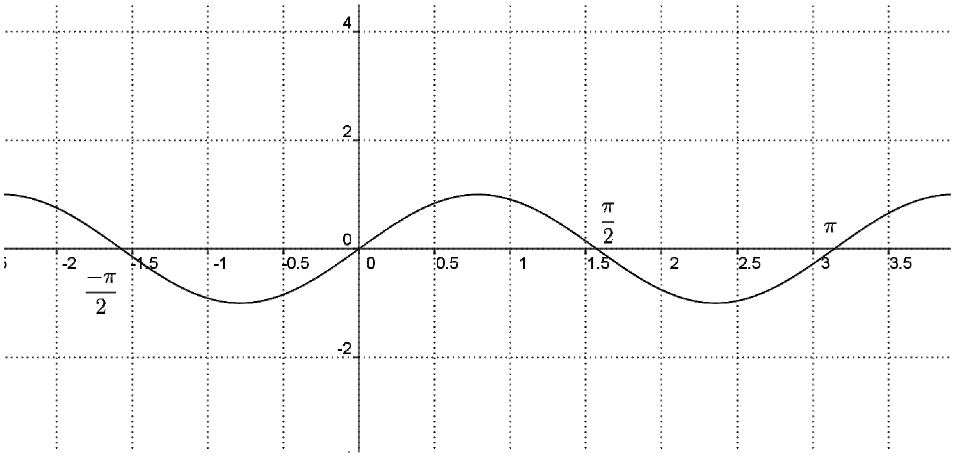
Proposition 3 : « La courbe 3 ci-dessous est la représentation graphique de f ».



courbe 1



courbe 2



courbe 3

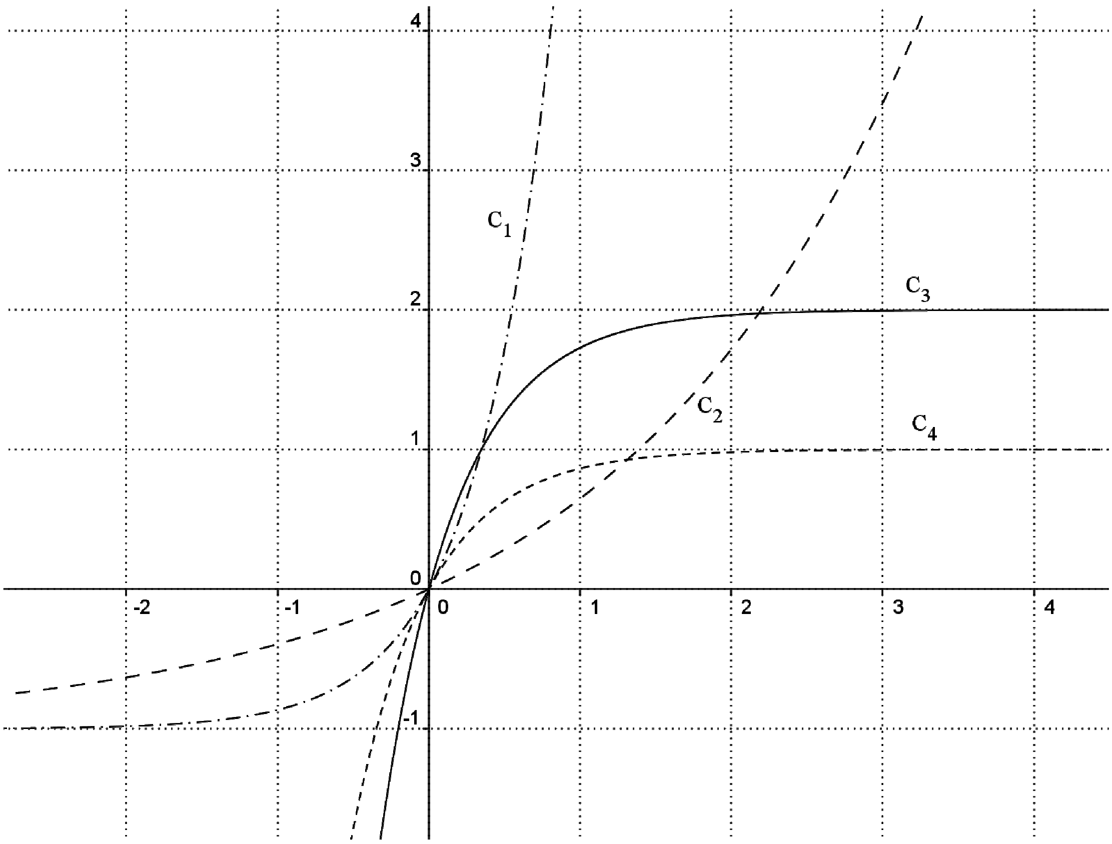
4. Énoncé 4 : On considère, dans un repère orthonormé de l'espace, le point $A(0\ ;\ 0\ ;\ 3)$ et le plan P d'équation $2x - y + z = 0$.

Proposition 4 : « La sphère de centre A et de rayon 2 et le plan P sont sécants. »

5. Énoncé 5 : On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 4$.

Parmi les quatre courbes ci-dessous, l'une représente la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$.

Proposition 5 : « La courbe représentative de la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ est la courbe C_4. »



4. Exercice 3 (5 points, spécialistes)

?

5. Exercice 4 (6 points)

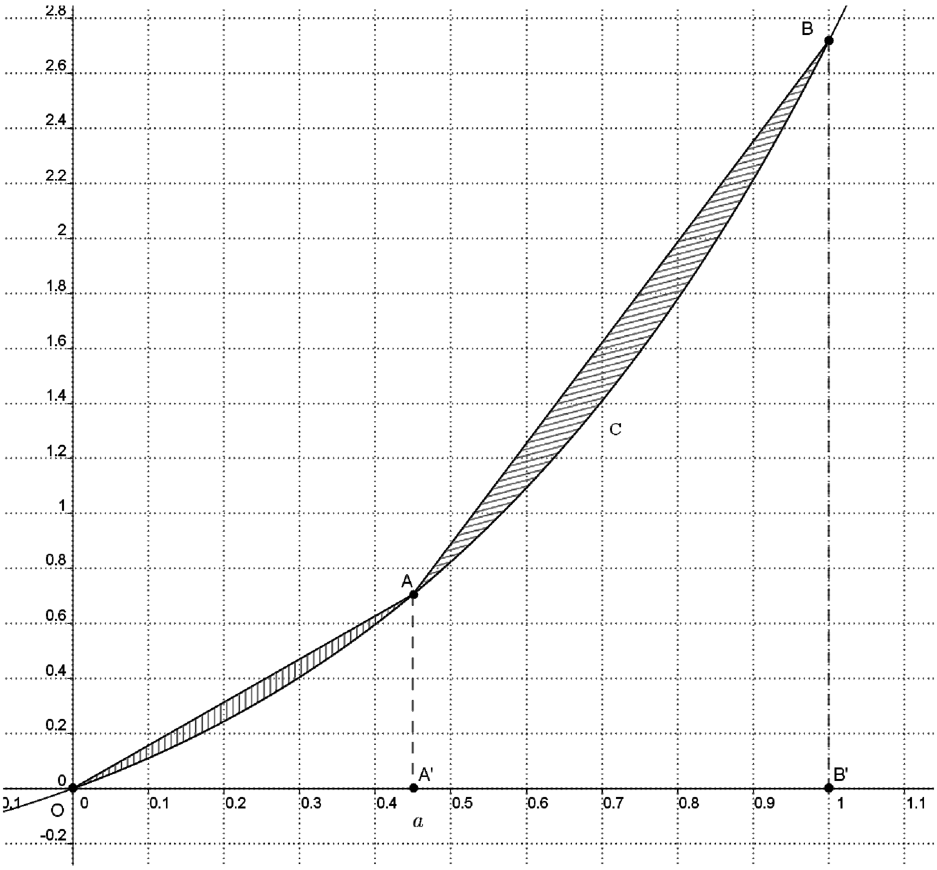
Soit *f* la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = xe^x$.

On désigne par C la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle [0 ; 1].

Sur la courbe C , tracée ci-dessous, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1 et on a tracé les segments [OA] et [AB]. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments [OA] et [AB] et la courbe C .On a placé les points A'(a ; 0) et B'(1 ; 0).

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale.



Partie A

1. Montrer que $\int_0^1 xe^x\,dx = 1$.

2. a. Donner l'aire du triangle OAA' et montrer que l'aire du trapèze ABB'A' est égale à $\frac{1}{2}\left(-a^2e^a + ae^a - ae + e\right)$.

b. En déduire que l'aire de la partie du plan hachurée est égale à $\frac{1}{2}\left(ae^a - ae + e - 2\right)$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = x\left(e^x - e\right) + e - 2$.

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$.

Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g''(x) = (2+x)e^x$.

2. En déduire les variations de la fonction g' sur $[0\,;+\infty[$.

3. Établir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

4. En déduire les variations de la fonction g sur $[0\,;+\infty[$.

5. En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale. Donner cette valeur de a.