

## Nouvelle-Calédonie

### 1. Exercice 1 (6 points)

#### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = 5 \ln(x+3) - x$ .

1. a. On appelle  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$ . Calculer  $f'(x)$  et étudier son signe sur  $[0; +\infty[$ .
- b. Donner, dans un tableau, les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- c. Montrer que, pour tout  $x$  strictement positif on a  $f(x) = x \left( 5 \frac{\ln x}{x} - 1 \right) + 5 \ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right)$ .
- d. En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- e. Compléter le tableau de variation de  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
2. a. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[0; +\infty[$ . On notera  $\alpha$  cette solution.
- b. Après avoir vérifié que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $[14; 15]$ , donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.
- c. En déduire le signe de  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

#### Partie B

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 5 \ln(u_n + 3) \end{cases}$  pour tout entier naturel  $n \geq 0$ .

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = 5 \ln(x+3)$ .

On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la droite D d'équation  $y = x$  et la courbe C, courbe représentative de la fonction  $g$ .

1. a. Construire sur l'axe des abscisses de la figure les termes  $u_0, u_1, u_2$  de la suite  $(u_n)$  en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.
- b. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite  $(u_n)$ .
2. a. Étudier le sens de variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- b. Vérifier que  $g(\alpha) = \alpha$  où  $\alpha$  est défini dans la partie A question 2. a.
- c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $0 \leq u_n \leq \alpha$ .
- d. Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie B.
- e. En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ .
3. On considère l'algorithme suivant :
 

$u$  prend la valeur 4

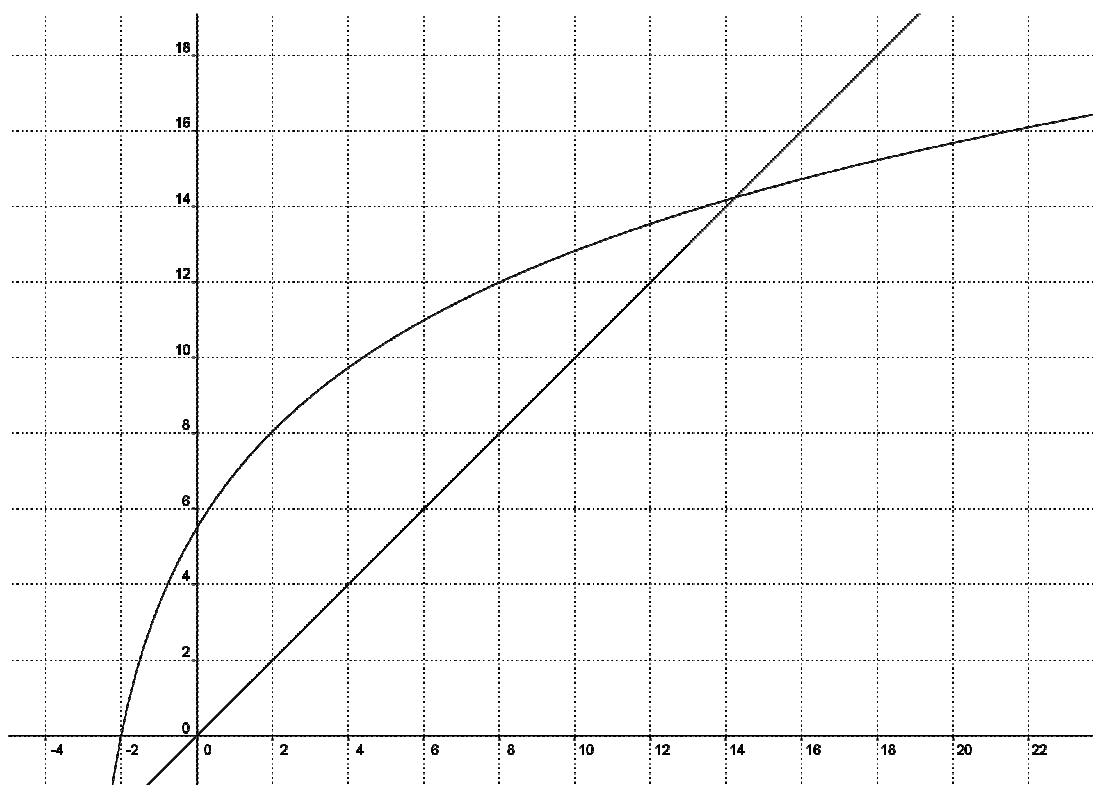
Répéter Tant que  $u - 14,2 < 0$

$u$  prend la valeur de  $5 \ln(u + 3)$

Fin du Tant que

Afficher  $u$

  - a. Justifier que cet algorithme se termine.
  - b. Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).



## 2. Exercice 2 (4 points)

Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment. Tous les résultats seront donnés sous la forme de fractions.

On dispose d'une urne  $U$  contenant trois boules blanches et deux boules rouges indiscernables au toucher.

### Partie A

On considère l'expérience suivante : on tire successivement trois fois de suite une boule de l'urne  $U$ , en remettant à chaque fois la boule dans l'urne.

On appelle  $X$  le nombre de fois où on a obtenu une boule rouge.

1. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité d'avoir obtenu exactement une fois une boule rouge.
3. Déterminer l'espérance mathématique de  $X$  et interpréter ce résultat.

### Partie B

On procède maintenant à une nouvelle expérience :

- on tire une boule de l'urne  $U$ . Si elle est rouge on s'arrête, sinon on la remet dans l'urne et on tire une boule à nouveau ;
- si cette deuxième boule est rouge, on s'arrête, sinon on la remet dans l'urne et on tire une boule pour la troisième fois.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré de probabilités.
2. On appelle  $Y$  le nombre de boules rouges obtenues lors d'une expérience. La variable aléatoire  $Y$  prend donc la valeur 1 si la dernière boule est rouge et 0 sinon.

Déterminer la loi de probabilité de  $Y$  et son espérance mathématique.

3. On appelle  $N$  le nombre de tirages effectués lors d'une expérience. Déterminer la loi de probabilité de  $N$  et son espérance mathématique.

4. On appelle *proportion moyenne de boules rouges* le rapport de l'espérance du nombre de boules rouges obtenues sur l'espérance du nombre de tirages.

Montrer que la proportion moyenne de boules rouges dans l'expérience est la même que la proportion de boules rouges dans l'urne.

## 3. Exercice 3 (5 points)

**Partie A :** restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : soit  $a$  un réel et  $(E_0)$  l'équation différentielle de fonction inconnue  $y$  de variable réelle, dérivable et de fonction dérivée  $y'$  :  $y' = ay$ .

Les solutions de  $(E_0)$  sont les fonctions de la forme  $x \rightarrow Ce^{ax}$ , où  $C$  est une constante réelle.

On considère  $a$  et  $b$  deux réels, avec  $a$  non nul.

Démontrer que les solutions de l'équation différentielle de fonction inconnue  $y$  de variable réelle, dérivable de fonction dérivée  $y'$  :  $y' = ay + b$  (E) sont les fonctions de la forme  $x \rightarrow Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ , où  $C$  est une constante réelle.

## Partie B

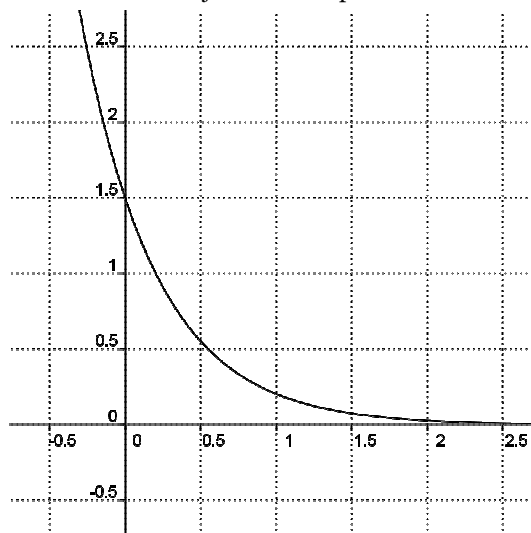
Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse :

**Affirmation 1** : si une fonction  $f$  définie sur l'ensemble des nombres réels  $P$  est solution de l'équation  $y' + 3y = 6$  alors la courbe représentant  $f$  admet une asymptote horizontale en  $+\infty$ .

**Affirmation 2** : si une fonction  $f$  définie sur l'ensemble des nombres réels  $P$  est solution de l'équation  $y' = y$  alors pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ .

3. La courbe d'une fonction solution de l'équation différentielle  $y' = -2y$  coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée  $\frac{3}{2}$  (voir figure ci-contre).

**Affirmation 3** : l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = \ln(3)$ , est  $\frac{3}{2}$ .



## 4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on appelle  $A$  le point d'affixe 1 et  $X$  le cercle de centre  $A$  et de rayon 1.

La figure sera réalisée sur une feuille de papier millimétré avec 4 cm pour unité graphique.

### Partie A

On considère l'équation (E) :  $z^2 - 2z + 2 = 0$ , où  $z$  est un nombre complexe. On appelle  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de (E).

- Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes  $X$ .
- On appelle  $M_1$  et  $M_2$  les points d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$  dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Montrer que  $M_1$  et  $M_2$  appartiennent au cercle  $X$ .

### Partie B

On considère l'application  $f$  du plan complexe qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  distinct de  $A$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par  $z' = \frac{2z-1}{2z-2}$ .

- Placer le point  $A$  et tracer le cercle  $X$  sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
- Montrer que pour tout complexe  $z$  distinct de 1 on a  $(z'-1)(z-1) = \frac{1}{2}$ .

Montrer que pour tout point  $M$  distinct de  $A$  on a : 
$$\begin{cases} AM \times AM' = \frac{1}{2} \\ M' \neq A \\ (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) = 0 + k(2\pi) \end{cases}, \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

4. On considère le point  $P$  d'affixe  $z_P = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$ . Construire le point  $P$ .

5. En utilisant la question 3, expliquer comment construire le point  $P'$ , image de  $P$  par  $f$ , et réaliser cette construction.

6. Soit un point  $M$  appartenant à la droite  $D$  d'équation  $x = \frac{3}{4}$ . Soit  $M'$  son image par  $f$ .

a. Montrer que le point  $M'$  appartient au cercle  $X'$  de centre  $O$  de rayon 1.

b. Tout point de  $X'$  a-t-il un antécédent par  $f$ ?

### 5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Les deux parties sont indépendantes.

#### Partie A

On considère deux carrés directs  $ABCD$  et  $DCEF$  de côté 1. Le point  $I$  est milieu de  $[BC]$  et le point  $J$  est milieu de  $[EF]$  (voir figure ci-dessous).

1. On considère la rotation  $r$  de centre  $D$  qui transforme  $A$  en  $C$ . Justifier que  $r(I) = J$ .

2. Justifier que  $r$  est l'unique similitude directe qui transforme  $A$  en  $C$  et  $I$  en  $J$ .

3. On appelle  $s$  la similitude directe qui transforme  $A$  en  $I$  et  $C$  en  $J$ .

On se place dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ .

a. Donner les affixes des points  $A, C, I$  et  $J$ .

b. Montrer que l'écriture complexe de  $s$  est  $z' = \left(\frac{1}{2} + i\right)z + 1 + \frac{1}{2}i$ .

c. Montrer que le point  $D$  est le centre de  $s$ .

#### Partie B

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère trois points  $M, N, P$  distincts entre eux et distincts du point  $O$ . On appelle  $m, n, p$  leurs affixes respectives.

On définit la similitude directe  $s_1$  qui transforme  $O$  en  $M$  et  $N$  en  $P$  et la similitude directe  $s_2$  qui transforme  $O$  en  $N$  et  $M$  en  $P$ .

1. Montrer que l'écriture complexe de  $s_1$  est  $z' = \frac{p-m}{n}z + m$ .

On admet que l'écriture complexe de  $s_2$  est  $z' = \frac{p-n}{m}z + n$ .

2. a. Montrer que si  $OMPN$  est un parallélogramme alors  $s_1$  et  $s_2$  sont des translations.

b. On suppose que  $OMPN$  n'est pas un parallélogramme. Justifier que  $s_1$  et  $s_2$  ont chacune un centre, et montrer que ces deux points sont confondus.

