Antilles-Guyane

1. Exercice 1 (4 points)

$(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormal de l'espace.

On note D la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Soit P le plan défini par l'équation $x + y + 2z - 1 = 0$. Soit S la sphère de centre B(1 ; –1 ; 0) et de rayon 1.

Pour chacune des phrases ci-dessous, une seule des trois propositions est exacte. Dans chaque cas, indiquer la bonne réponse en justifiant soigneusement votre choix. Il est attribué pour chaque question 0,5 *point si la réponse est exacte et* 0,5 *point si la justification est correcte.*

1. La droite D et le plan P sont :

a. parallèles	b. perpendiculaires	c. non parallèles et non perpendiculaires

2. Soit P' le plan contenant la droite D et perpendiculaire au plan P. P' admet pour équation cartésienne :

a. $-2y + z + 2 = 0$	b. $2x - z = 0$	c. $x - y - z = 0$

3. La droite Δ, intersection du plan P et du plan d'équation $2x - z = 0$, admet pour représentation paramétrique :

a. $\begin{cases} x = t \\ y = -3t+1 \\ z = 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.	b. $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.	c. $\begin{cases} x = t \\ y = -5t+1 \\ z = 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

4. L'intersection de la sphère S et du plan P est :

a. un point	b. l'ensemble vide	c. un cercle

2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} + i$; $z_B = -1 + i\sqrt{3}$; $z_C = -1 - 3i$.

On note *D* l'image du point *C* par la rotation de centre *O* et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

On note *E* l'image du point *B* par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.

1. a. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.

b. Sur une feuille de papier millimétré, en prenant pour unité graphique 2 cm, placer les points *A* et *B* et *C*.

c. Démontrer que le triangle *OAB* est rectangle isocèle.

2. a. Construire les points *D* et *E*. Calculer leurs affixes z_D et z_E.

b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux et que $OE = AD$.

3. Le but de cette question est de retrouver le résultat précédent dans un cas plus général. Il est inutile de refaire une figure.

Soient *A*, *B*, *C*, *D* et *E* les points d'affixes respectives non nulles z_A, z_B, z_C, z_D et z_E tels que

- le triangle *OAB* est rectangle isocèle en *O* avec $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2}$;
- le triangle *OCD* est rectangle isocèle en *O* avec $\left(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OD}\right) = \frac{\pi}{2}$;
- le quadrilatère *OBEC* est un parallélogramme.

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...

a. Justifier les égalités suivantes : $z_B = iz_A$, $z_D = iz_C$, $z_E = iz_A + z_C$.

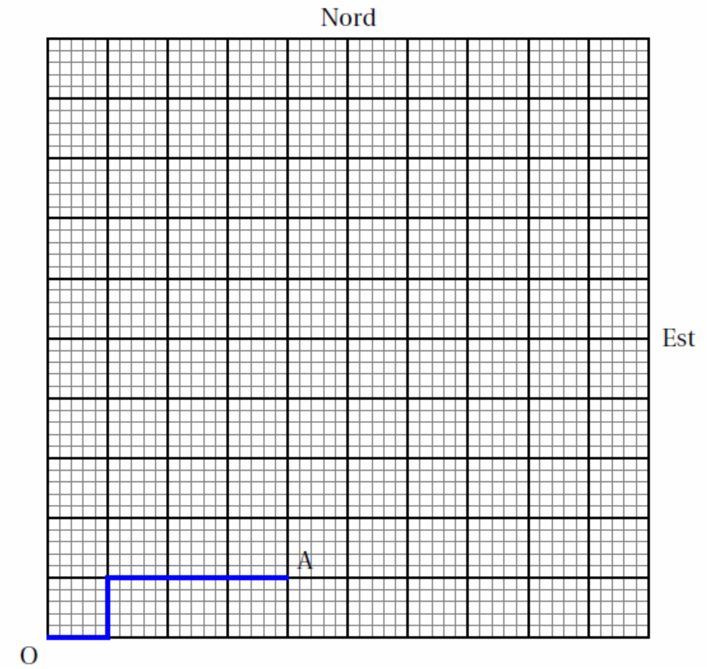
b. Montrer que $\dfrac{z_D - z_A}{z_E} = i$.

c. Interpréter géométriquement $\left|\dfrac{z_D - z_A}{z_E}\right|$ et $\arg\dfrac{z_D - z_A}{z_E}$ puis conclure.

3. Exercice 3 (5 points)

Les rues d'une ville nouvelle sont structurées de telle sorte que les pâtés de maisons sont des carrés superposables et les rues sont toutes parallèles ou perpendiculaires.

On identifie le plan de la ville au quadrillage d'un carré de 10 unités sur 10 dans lequel on se repère avec des points à coordonnées entières qui correspondent aux carrefours.



Le point O a pour coordonnées (0 ; 0), le point A a pour coordonnées (4 ; 1).

On s'intéresse aux chemins partant de O et arrivant à un autre point M de coordonnées (p ; q) où p et q sont des entiers naturels tels que $p \leq 10$ et $q \leq 10$.

À chaque intersection, on ne peut aller que vers le nord (N) ou vers l'est (E).

Dans tout l'exercice, on décrit un chemin à l'aide d'un « mot » composé successivement des lettres N ou E qui indiquent dans l'ordre la direction à suivre à chaque intersection.

On appelle *longueur* d'un chemin le nombre de lettres employées pour le décrire.

Par exemple : pour se rendre en A, on peut suivre par exemple les chemins NEEEE ou ENEEE (marqué en gras sur la figure) ; ces deux chemins ont une longueur égale à 5.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie A - Dénombrement

1. Donner la liste de tous les chemins permettant de se rendre en A.

2. Soit M un point de coordonnées (p ; q) où p et q sont des entiers naturels tels que $p \leq 10$ et $q \leq 10$.

Exprimer, en fonction de p et q, la longueur des chemins qui permettent d'arriver en M.

3. Montrer qu'il y a $\dbinom{p+q}{p}$ chemins différents qui permettent d'arriver en M.

4. Dénombrer les chemins pour arriver au point C de coordonnées (7 ; 5).

5. Dénombrer les chemins pour arriver en C en passant par A.

Partie B - Étude d'une variable aléatoire

Tous les chemins considérés dans la suite de l'exercice vérifient les deux propriétés suivantes :

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...

- ils sont de longueur 5 ;

- un promeneur part de O et à chaque intersection la probabilité qu'il aille vers le Nord est de $\frac{2}{3}$ (et donc de $\frac{1}{3}$ vers l'Est), indépendamment de son choix précédent.

On appelle X la variable aléatoire qui à tout chemin suivi par le promeneur associe le nombre de fois où il va vers le Nord.

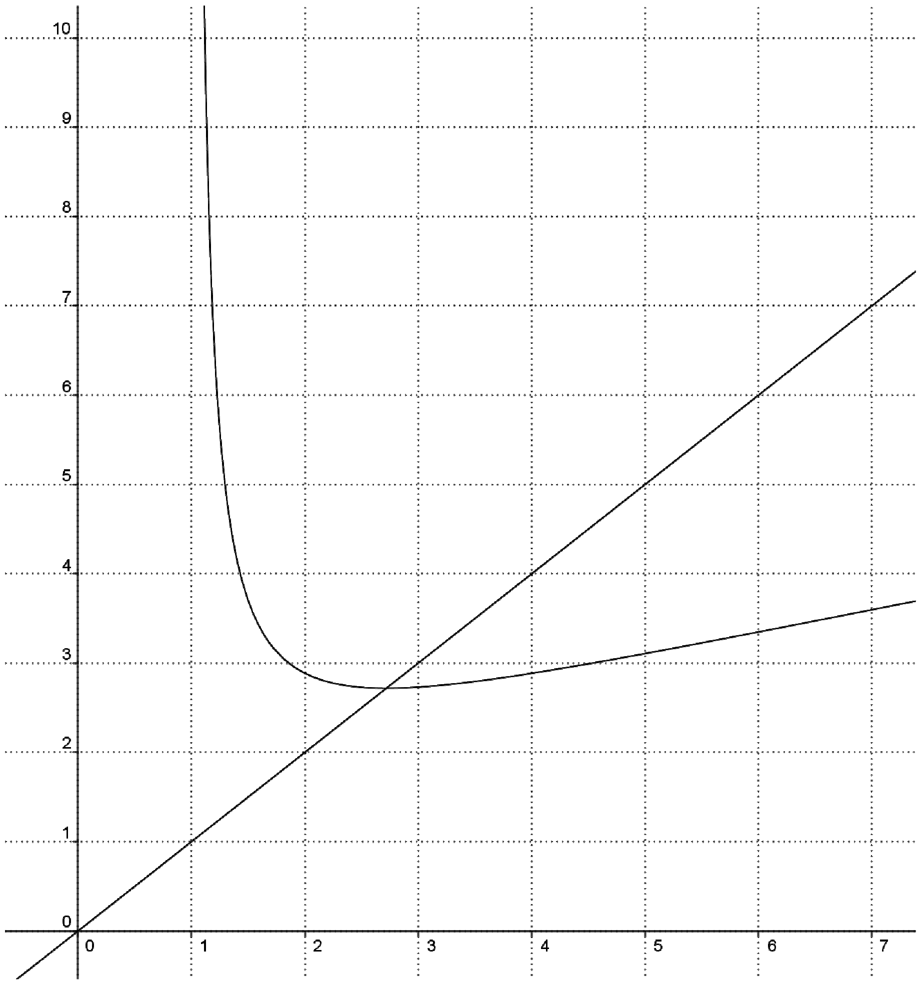
1. Énumérer, en donnant la liste de leurs coordonnées, tous les points sur lesquels peut aboutir un chemin.
2. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
3. Calculer la probabilité que le promeneur arrive en A.

4. Exercice 4 (6 points

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

Ci-dessous, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe C représentative de la fonction f ainsi que la droite D d'équation $y = x$.



1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.
3. En déduire que si $x > e$ alors $f(x) > e$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Devoir.tn Toutes les matières, tous les niveaux...

1. Sur la figure, en utilisant la courbe C et la droite D, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera apparents les traits de construction.

Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > e$.

b. Déterminer les variations de la suite (u_n).

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d. Déterminer sa limite L.

3. On donne l'algorithme suivant :

Variables	X est une variable réelle ; Y est une variable entière

Traitement	Affecter 5 à X et 0 à Y
	Tant que $X > 2{,}72$ faire
	    Affecter $(X/\ln X)$ à X
	    Affecter $Y + 1$ à Y
	Fin de Tant que

Sortie	Afficher Y

À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	5	3,1066746728	2,7406525323	2,7183726346	2,71828183001	2,7182818285

5. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...