

Durée : 4 heures

🌀 Baccalauréat C Aix-Marseille¹ juin 1965 🌀
Série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

On donne un triangle ABC, dont le centre de gravité est G ; soit M un point de son plan.

1. Exprimer

$$f(M) = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}.$$

au moyen des seules longueurs MG , BC , CA , AB .

2. Quel est l'ensemble E des points M tels que $f(M) = 0$?
Quels points de E appartiennent au cercle de diamètre BC ?

EXERCICE 2

Soit un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$; p et q étant deux nombres réels, on désigne par M le point de coordonnées $(p ; q)$ et on considère l'équation en z

$$(1) \quad z^2 - 2pz + q = 0,$$

dont les racines peuvent être réelles ou complexes.

Ainsi, à tout point M est associée une équation (1), et réciproquement.

1. Déterminer et représenter sur une même figure les ensembles A , B , C des points M tels que (1) possède
- des racines complexes ;
 - des racines réelles et distinctes ;
 - une racine double.

Calculer les racines dans chacun de ces trois cas.

2. Former l'équation de la tangente à C en son point d'abscisse c ; montrer que, si $M(p ; q)$ appartient à B , l'équation (1) donne les abscisses des points de C où la tangente passe en M .

Dans les deux questions suivantes, k désigne un nombre réel positif donné ; pour répondre à ces questions, on pourra examiner successivement les cas où M appartient à A ou à B .

3. Déterminer l'ensemble E_k des points M tels que le module de la différence entre les racines de l'équation (1) associée à M soit inférieur à $2k$.
Représenter sur une figure les ensembles A , B , C , E_k et hachurer ce dernier.
4. Déterminer l'ensemble F_k des points M tels que les modules des racines de l'équation (1) associée à M soient, *tous deux*, inférieurs à k .
Représenter sur une figure les ensembles A , B , C , F_k et hachurer ce dernier.
5. On donne un nombre positif k ; quel est le plus grand nombre, k' , tel que l'ensemble $F_{k'}$ soit inclus dans l'ensemble E_k ?
Est-il possible de répondre en tout ou en partie à cette question sans utiliser les résultats des deux questions précédentes ?

1. Bordeaux-Clermont-Montpellier-Nantes-Poitiers-Rennes-Toulouse

6. On suppose que M appartient à B et l'on désigne par Γ_M le cercle qui a son centre sur la droite $x'Ox$ et qui coupe cette droite aux points dont les abscisses sont les racines de l'équation (1) associée à M .

Écrire l'équation du cercle Γ_M .

Montrer qu'un sous-ensemble de cercles Γ_M est un faisceau linéaire si, et seulement si, les points M correspondants appartiennent à une même droite, Δ , non parallèle à Oy , qu'on déterminera par une équation de la forme

$$y = mx + h.$$

Montrer que la nature du faisceau est liée au nombre des points communs à Δ et à C ; peut-on caractériser géométriquement, lorsqu'ils existent, les points de Poncelet du faisceau?