Durée : 4 heures

Baccalauréat Maroc septembre 1965

Série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

ABC étant un triangle équilatéral, l'ensemble des points M du plan tels que

$$2\overline{\text{MA}}^2 + \overline{\text{MB}}^2 + \overline{\text{MC}}^2 = k^2,$$

k étant un réel donné.
Discuter en fonction de k et du côté a du triangle.

EXERCICE 1

Partie A

Déterminer les limites, quand $x \to 0$, des expressions 1-v' x

$$\frac{1-\sqrt{1-x^4}}{x} \quad \text{et} \quad \frac{x^4+1-\sqrt{1-x^4}}{x^2\sqrt{1-x^4}}.$$

Partie B

On considère la fonction

$$y = \frac{1+\epsilon\sqrt{1-x^4}}{x} \quad (\text{où } \epsilon = \pm 1).$$

1. Calculer la fonction dérivée.
2. Étudier les variations et construire le graphe en repère orthonormé dans les deux cas suivants :

$$\epsilon = +1 \quad \epsilon = -1.$$

3. En déduire l'ensemble (C) des points M dont les coordonnées sont liées par la relation

$$xy^2 - 2y + x^3 = 0.$$

Partie C

1. Montrer que les relations

$$(\text{OM}, \text{OP}) \equiv 0 \pmod{\pi} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{OM}} \cdot \overrightarrow{\text{OP}} = k$$

   sont, dans le plan, équivalentes à :
   « P est l'inverse de M dans l'inversion de pôle O et de puissance k ».
2. Soit, dans un repère orthonormé $x'\text{O}x, y'\text{O}y$, x et y les coordonnées de M, X et Y les coordonnées de P ; calculer x et y en fonction de X et Y.
3. Montrer que la courbe (C) est invariante dans l'inversion de pôle A(+ 1 ; + 1) et de puissance 4.

Partie D

Soit, dans le même repère orthonormé, Δ la droite d'équation $x = 1$, qui coupe xx' en B.
Une droite D variable, passant par O, coupe Δ en T. La droite D est telle que

$$(x'x,\ D) \equiv \theta \pmod{\pi},\ \text{avec } 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

On construit sur $x'x$ le point K défini par

$$\text{OK} = 2\text{BT}, \quad \text{OK} > 0.$$

1. Construire les cercles (γ) et (γ') passant par B et K et tangents à D.
2. Trouver, lorsque D varie, l'ensemble des points de contact, M et M′, de D avec (γ) et (γ').
3. On donne les points $(+\,1\,;\,+\,1)$ et $\text{A}'(-1\ ;\ -1)$.
   Soit (γ_1) et (γ_1') les inverses de (γ) et (γ') dans l'inversion de pôle A et de puissance 4.
   Montrer qu'il existe un cercle (d) passant par A et A′ et tangent à (γ_1) et (γ_1').
   Trouver, lorsque θ varie, l'ensemble des points de contact.