Baccalauréat C Aix–Marseille juin 1966
Mathématiques et Mathématiques-Technique

Le candidat doit traiter l'exercice et le problème.

EXERCICE 1 **6 POINTS**

On donne dans un plan un vecteur fixe $\overrightarrow{V}$ non nul et un point fixe O.

1. M étant un point quelconque du plan, M' le transformé de M par la translation (T) de vecteur directeur $\overrightarrow{V}$, et M'' le transformé de M par la symétrie (S) de centre O, quel est l'ensemble des points M tels que $\left|\overrightarrow{M'M''}\right| = \left|\overrightarrow{V}\right|$?
2. Quels sont les points doubles respectifs des deux transformations $(S \circ T)$ et $(T \circ S)$ produits de la translation et de la symétrie précédente ?
3. Montrer que chacune des deux transformations $(S \circ T)$ et $(T \circ S)$ est involutive.

PROBLÈME **14 POINTS**

$z = x + \text{i}y$ et $Z = X + \text{i}Y$ sont deux nombres complexes liés par la relation :

$$(1) \qquad Z = \frac{az+b}{cz+d}$$

où a, b, c, d sont des nombres réels tels que $ad - bc \neq 0$.

1. La relation (1) définit une transformation ponctuelle du plan orthonormé Oxy, faisant correspondre au point m d'affixe z (c'est-à-dire dont les coordonnées cartésiennes dans le plan Oxy sont les nombres réels x et y), le point M d'affixe Z.
   - **a.** Cette transformation conserve l'axe $x'x$ (c'est-à-dire transforme tout point de $x'x$ en un point de $x'x$) ; dire pourquoi.
   - **b.** On considère sur l'axe $y'y$ un point quelconque m d'affixe $z = \text{i}y$; calculer l'affixe $Z = X + \text{i}Y$ du point M correspondant ; comment faut-il choisir les nombres réels a, b, c, d pour que (1) conserve non seulement l'axe $x'x$ mais aussi l'axe $y'y$? On trouvera qu'il existe deux transformations répondant à la question $\left(Z = kz \quad \text{et} \quad Z = \dfrac{k}{z},\ k \text{ réel}\right)$.
2. On considère celle (T) des deux transformations précédentes (autre que l'identité) admettant le point A(+ 1 ; 0) pour point double.
   - **a.** Montrer qu'elle est involutive et qu'elle admet le deuxième point double B(−1 ; 0).
   - **b.** Montrer que deux points correspondants quelconques m et M et les points A et B sont situés sur un même cercle (C), que l'axe $x'x$ bissecte l'angle $\widehat{m\text{O}M}$, et que le point où la droite mM coupe $y'y$ est le pôle de $x'x$ par rapport à (C).
3. À tout point m du plan autre que A ou B, (T) attache la droite D joignant m à son transformé M.
   - **a.** Réciproquement, toute droite D du plan provient-elle d'un point m ; préciser l'ensemble des droites D pour lesquelles il en est ainsi.
   - **b.** Indiquer une construction géométrique du couple de points transformés $(m,\ M)$ situés sur une droite D donnée.
   - **c.** Lieu géométrique du point M lorsque m décrit une droite Δ passant par O ; lieu du milieu du segment mM dans la même hypothèse.

4. On suppose que m décrit un cercle C de centre O et de rayon donné r, et l'on pose $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{O}x}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{O}m}}\right) = \varphi$.

a. Former, relativement aux axes Ox, Oy, l'équation de la droite D attachée à m, et celle du lieu géométrique du point P se projetant orthogonalement sur les axes aux points où ils sont coupés par D.

b. Γ étant l'enveloppe de D, et sans chercher à déterminer r, trouver le nombre maximum de tangentes qu'on peut lui mener par un point donné $p\left(x_0\,;\,y_0\right)$ du plan (on pourra former l'équation donnant $\left.\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right)$.

Nota. - Les candidats qui seraient arrêtés par le résultat demandé à la fin du n° 2 peuvent l'admettre, et traiter les questions 3 et 4 rendues ainsi indépendantes des deux précédentes.