Baccalauréat C Amiens juin 1966
Mathématiques et Mathématiques-Technique

Le candidat doit traiter l'exercice et le problème.

EXERCICE 1

Existe-t-il des nombres complexes z tels que les trois nombres z, $\dfrac{1}{z}$ et $(1-z)$ aient le même module ?
Pour chaque valeur de z trouvée, représenter les images de z, de $\dfrac{1}{z}$ et de $(1-z)$.

EXERCICE 2

Étant donné, dans le plan, un point O et une droite (D) passant par O, on considère la transformation ponctuelle T qui, à chaque point M du plan, associe le point $\mathrm{M}' = T(\mathrm{M})$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{OM}' = 2\mathrm{OM},\\ \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,, \overrightarrow{\mathrm{OM}'}\right) \text{ a pour bissectrice (D).}\end{array}\right.$$

Peut-on considérer cette transformation T comme la composée de deux transformations simples ?
Exprimer quatre décompositions possibles.

EXERCICE 3

Soit a un nombre donné, réel et positif. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (axes $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$), on considère le point fixe A de coordonnées $\left(a\,;\ a\sqrt{3}\right)$ et sa projection, B, sur $y'\mathrm{O}y$.
À chaque point M de $x'\mathrm{O}x$ (déterminé par son abscisse m) on associe le point P, orthocentre du triangle ABM.

1. Calculer les coordonnées de P en fonction de m et de a et construire la courbe (Π_a) décrite par P quand M décrit $x'\mathrm{O}x$.
   Reconnaître la nature de (Π_a) et préciser ses principaux éléments, notamment le foyer et la directrice.
2. On considère le cercle (C), de centre P, de rayon PM. Utiliser les résultats précédents pour démontrer que les cercles (C) sont également tangents à un cercle fixe, que l'on précisera.
   T désignant le point de contact de ces cercles, démontrer que la droite TM passe par un point fixe, I, et qu'il existe un cercle fixe, (I), de centre I que tous les cercles (C) coupent aux extrémités d'un de ses diamètres.
   Préciser le rayon de ce cercle (I).
3. AM coupant $y'\mathrm{O}y$ en N, les perpendiculaires en N à AM et en M à $x'\mathrm{O}x$ se coupent en Q.
   Déterminer les coordonnées de Q et l'équation, $y = f_a(x)$, de la courbe (Γ_a), lieu géométrique des points Q.
   Quelle particularité présente la tangente à (Γ_a) au point d'abscisse $2a$?
   Étudier les variations de la fonction f_a.
   Construire le graphe dans le cas où $a = 1$.

N. B. - La question 3. peut être traitée indépendamment des deux autres.