

∞ Baccalauréat C Caen juin 1966 ∞
Mathématiques et Mathématiques et Technique

EXERCICE 1

Soit la fonction

$$y = 5 \cos x - 10 \cos^3 x + 8 \cos^5 x.$$

1. Montrer que l'on peut écrire

$$y = \frac{5}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos 5x.$$

2. Étudier les variations et tracer la courbe représentative de la fonction y dans l'intervalle $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

EXERCICE 2

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé Ox, Oy , on considère la transformation ponctuelle \mathcal{T} qui fait correspondre au point M de coordonnées $(x; y)$ le point M' de coordonnées $(x'; y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

où a, b, c et d désignent des constantes réelles données vérifiant la condition

$$ad - bc \neq 0.$$

On notera $M' = \mathcal{T}(M)$ et l'on associera à \mathcal{T} le tableau

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Les constantes a, b, c et d seront appelées les éléments du tableau T . On dira que deux transformations \mathcal{T} sont égales (ou identiques) si, et seulement si, elles ont même tableau.

Partie A

On effectue successivement deux transformations \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 de tableaux respectifs

$$\mathcal{T}_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}.$$

On obtient donc, à partir d'un point M , successivement

$$M_1 = \mathcal{T}_1(M), \quad M_2 = \mathcal{T}_2(M_1).$$

1. Montrer que la transformation \mathcal{T} qui fait correspondre à M le point M_2 est de même nature que les transformations \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 , en d'autres termes que

$$\begin{cases} x_2 = ax + by, \\ y_2 = cx + dy, \end{cases}$$

avec $ad - bc \neq 0$ (x_2, y_2 désignent les coordonnées de M_2).

(On explicitera au préalable a, b, c et d en fonction de a_1, b_1, c_1, d_1 et a_2, b_2, c_2, d_2 .)

On notera

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \mathcal{T} \circ T_2 \circ \mathcal{T}^{-1} \\ T &= T_2 \circ T_1\end{aligned}$$

(T désignant le tableau associé à \mathcal{T} et l'on dira que T est le produit de T_1 par T_2 .)

2. Montrer qu'il existe une transformation \mathcal{T}_0 , dont on déterminera le tableau associé T_0 , telle que

$$\mathcal{T}_0 \circ \mathcal{T} = \mathcal{T} \circ \mathcal{T}_0 = \mathcal{T},$$

quelle que soit la transformation \mathcal{T} .

3. Montrer qu'en général

$$T_2 \circ T_1 \neq T_1 \circ T_2$$

et illustrer cette propriété par un exemple numérique.

4. Montrer qu'à toute transformation \mathcal{T} on peut faire correspondre une transformation, dite réciproque ou inverse de \mathcal{T} et notée \mathcal{T}^{-1} (dont le tableau sera noté T^{-1}) telle que

$$\mathcal{T} \circ \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{T} = \mathcal{I}.$$

\mathcal{I} désigne la transformation définie au 2.)

Partie B

On particularise la transformation \mathcal{T} en posant

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

où θ désigne un angle donné.

On notera $\mathcal{T}_\theta, T_\theta$ pour marquer la dépendance de \mathcal{T}, T et θ .

1. Expliciter le tableau T_θ^{-1} associé à la transformation \mathcal{T}_θ^{-1} inverse de \mathcal{T}_θ et vérifier la relation $\mathcal{T}_\theta^{-1} = \mathcal{T}_\theta$.
2. À chaque point M de coordonnées $(x; y)$ on associe le nombre complexe $z = x + iy$, qu'on appelle affixe de M .
Montrer que l'affixe du point $\mathcal{T}_\theta(M)$ est de la forme $k\bar{z}$, où \bar{z} désigne le nombre complexe conjugué de z et k un nombre complexe indépendant de z . Expliciter k .
3. Donner une construction géométrique élémentaire permettant de passer du point M au point $\mathcal{T}_\theta(M)$.