Baccalauréat C Cambodge et Laos septembre 1966
Mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

1. - Résoudre, sur l'ensemble des complexes, l'équation

$$Z^2 = \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

EXERCICE 2

Dans un plan rapporté au repère orthonormé $(x'\mathrm{O}x,\ y'\mathrm{O}y)$, on donne les deux points $\mathrm{A}(-1\ ;\ 0)$ et $\mathrm{B}(+1\ ;\ 0)$.

PREMIÈRE PARTIE

On considère la transformation ponctuelle qui, à tout point M du cercle (Γ) de diamètre AB, repéré par l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) = \alpha \pmod{2\pi}$, fait correspondre le point d'intersection, C, de la droite AM et de la perpendiculaire menée de B à OM.

1. Étudier, suivant les différentes positions de M sur le cercle (Γ), l'existence du point C. Ce point C peut-il être confondu avec A ou B ?
2. Calculer en fonction de α l'ordonnée, y, du point C et montrer que cette ordonnée peut se mettre sous la forme

$$y = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

3. Étudier et représenter dans un système d'axes rectangulaires les variations de y en fonction de α lorsque α varie de $-\pi$ à $+\pi$.
   On vérifiera que y' peut se mettre sous la forme ,

$$y' = \frac{P(\cos\alpha)}{1 + \cos\alpha},$$

   $P(\cos\alpha)$ étant un polynôme par rapport à $\cos\alpha$.

DEUXIÈME PARTIE

On considère maintenant tous les points C du plan tels que la médiane OC du triangle ABC correspondant soit moyenne proportionnelle entre les côtés AC et BC.

1. Dans le repère donné, on représente par x et y les coordonnées du point C.
   Former l'équation de l'ensemble, (H), de ces points C. Préciser les éléments remarquables de (H).
2. Déterminer géométriquement l'ensemble (H) et montrer que l'on retrouve les résultats de la question précédente.
3. Montrer que les cercles de diamètres respectifs CA et CB restent tangents à un cercle fixe et déterminer l'ensemble des positions du deuxième point d'intersection de ces deux cercles.
4. Montrer que les cercles ayant C pour centre et tangents à $y'\mathrm{O}y$ découpent sur $x'\mathrm{O}x$ des segments de longueur constante. Calculer cette longueur.

N. B. - Les deux parties du problème sont indépendantes.