

**∞ Baccalauréat Dijon juin 1966 ∞**  
**Mathématiques et Mathématiques et Technique**

**EXERCICE 1**

1. Démontrer que le carré de tout nombre impair est congru à 1 modulo 8.
2. Résoudre en nombres entiers l'équation

$$8x + 1 = y^2.$$

**EXERCICE 2**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

On désigne par (E) l'ensemble des points du plan non situés sur l'un des axes de coordonnées.

Dans l'ensemble (E), on considère la transformation ponctuelle  $T_1$  qui, à tout point  $m$  de coordonnées  $x$  et  $y$ , fait correspondre le point M de coordonnées  $X$  et  $Y$ ,  $X$  et  $Y$  étant déterminés par les relations

$$\begin{cases} X &= & x \\ Y &= & \frac{1}{y} \end{cases}$$

1. Montrer que cette transformation réalise une application bijective (on peut dire aussi application biunivoque, ou bijection) et involutive de (E) sur lui-même.  
Rechercher les points doubles de  $T_1$ .

2. On considère une droite (D). Quel est l'ensemble transformé de  $(D) \cap (E)$  :
  - a. lorsque (D) est parallèle à l'un des axes de coordonnées ;
  - b. lorsque (D) n'est pas parallèle à l'un des axes de coordonnées ?

3. On considère le cercle (C) de centre O, de rayon 1.

Le point  $m$  variant sur la droite  $y = b$ , montrer que la polaire de M (transformé de  $m$ ) par rapport à (C) passe par un point fixe.

4. On considère la transformation  $T_2$  qui à tout point  $m(x ; y)$  associe le point  $m'$  dont les coordonnées,  $x'$  et  $y'$ , sont données par

$$\begin{cases} x' &= & \frac{1}{x} \\ y' &= & y \end{cases}$$

Montrer que la transformation  $T = T_2 \circ T_1$  est une bijection de E sur lui-même.  
T est-elle involutive ?

5. On considère le point  $A(a ; b)$  et son image  $A''(a'' ; b'')$  par T. Comment faut-il choisir A pour que O, A et  $A''$  soient alignés ?  
Lorsqu'il n'en est pas ainsi, quelles sont les bissectrices de l'angle  $AOA''$  ?
6. On considère le cercle (C) d'équation

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Former l'équation de la courbe ( $\Gamma$ ) transformée de  $(C) \cap (E)$  par T.

Quels sont les éléments de symétrie de ( $\Gamma$ ) ?

Construire la branche ( $\gamma_1$ ) de ( $\Gamma$ ) située dans le premier quadrant.

Soit  $H$  le point d'abscisse 2 de  $(\gamma_1)$ ,  $B_1$  la projection orthogonale de  $B$  sur  $x'Ox$ .  
Un point variable  $M$  d'abscisse  $\lambda$  décrit  $(\gamma_1)$ .  $M_1$  désigne la projection de  $M$  sur  $Ox$ .

Évaluer l'aire arithmétique du trapèze mixtiligne  $BB_1M_1M$  :

- a. lorsque  $\lambda > 2$ . Cette aire admet-elle une limite lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$  ?
- b. lorsque  $1 < \lambda < 2$ . Cette aire admet-elle une limite lorsque  $\lambda$  tend vers 1 ?