Baccalauréat La Réunion juin 1966

Mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Le nombre e étant la base des logarithmes népériens et m étant un nombre réel donné, déterminer les valeurs de x dans l'ensemble des réels telles que

$$\mathrm{e}^{x} + m\mathrm{e}^{-x} = 1.$$

Application numérique : $m = -12$.

Donner le résultat avec la précision des tables de logarithmes à cinq décimales.

EXERCICE 2

Dans tout le problème le plan est rapporté à un système d'axes orthonormé $x'\mathrm{O}x,\ y'\mathrm{O}y$.

1. On considère l'ensemble (H) des points $\mathrm{M}(x\ ;\ y)$ dont les coordonnées vérifient la relation

   $$(x+a)^2 - y^2 = a^2$$

   a est une mesure de longueur donnée non nulle).

   Construire l'ensemble (H) dans le repère donné, en précisant les sommets, les éléments de symétrie, les asymptotes.

   Une droite (D) variable a pour équation

   $$y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

   Déterminer en fonction de φ les coordonnées, x et y, du point commun, M, autre que O, à la courbe (H) et à la droite (D).
2. On appelle (T) la transformation ponctuelle du plan qui, à tout point $\mathrm{M}(x\ ;\ y)$ distinct de O, associe le point $\mathrm{P}(X\ ;\ Y)$ tel que

   $$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{4a2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{OM}^2}.$$

   Déterminer les coordonnées, X et Y, du point P en fonction des coordonnées, x et y, de M. Exprimer, en fonction de φ, les coordonnées, X et Y, de P lorsque M est sur la courbe (H).

   Montrer que l'ensemble (Γ) des points P associés aux différents points de (H) est identique à l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient la relation

   $$Y^2 + X^2 = \frac{4aX^2}{2a - X}.$$
3. Étudier les variations de la fonction

   $$Y = X\sqrt{\frac{2a+X}{2a-X}}.$$

   Construire son graphe dans le repère donné.

   En déduire l'ensemble (Γ) trouvé dans la question précédente.
4. On construit le cercle (C) ayant pour centre O et dont le rayon mesure $2a$.

   Montrer que les points communs à ce cercle et à la courbe (H) sont les sommets d'un triangle équilatéral.

   Préciser la transformation (T) qui associe les courbes (H) et (Γ). En déduire les points communs aux courbes (H) et (Γ).