Baccalauréat Montréal et New York juin 1966
Mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

1. Déterminer, sur le cercle trigonométrique, les extrémités de tous les arcs x vérifiant la relation

$$2\sin x\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\cos^2 x-\left(\sqrt{3}+1\right)\sin^2 x=0.$$

2. Calculer avec la précision des tables de logarithmes à cinq décimales les valeurs de x (en degrés) satisfaisant à la relation

$$2\sin x\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\cos^2 x-\left(\sqrt{3}+1\right)\sin^2 x=0,1.$$

EXERCICE 2

Partie A

On rappelle que le nombre a (réel ou complexe) est appelé racine du polynôme $P(x)$ si $P(a)=0$.
On donne les trois polynômes :

$$\begin{array}{rcl}A(x)&=&a_0x^2+a_1x+a_2,\\B(x)&=&b_0x^2+b_1x+b_2,\\C(x)&=&c_0x^2+c_1x+c_2.\end{array}$$

Les constantes a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1 et c_2 sont réelles et choisies de telle façon que, pour tout x, on ait

$$A^2(x)+B^2(X)=C^2(X).$$

D'autre part, aucun des nombres a_0, b_0, c_0 n'est nul.

1. Montrer que, si deux de ces trois polynômes admettent une racine commune, réelle ou complexe, cette racine est aussi racine du troisième.

2. Montrer que, si les deux polynômes $B(x)-C(x)$ et $B(x)+C(x)$ admettent une racine commune, cette racine e8t également racine de $B(x)$ et de $C(x)$.

Partie B

Dans toute la suite du problème, on suppose que les polynômes $A(x), B(x)$ et $C(x)$ n'ont pas de racine commune.

1. Montrer que $C(x)$ possède deux racines complexes conjuguées. À partir de l'égalité

$$A^2(x)=[C(x)-B(x)][C(x)+B(x)],$$

montrer que les polynômes $C(x)-B(x)$ et $C(x)+B(x)$ ont chacun une racine double réelle.

En déduire que $A(x)$ et $B(x)$ admettent chacun deux racines réelles distinctes.

2. On prend $a_0=1$ et l'on suppose connues les racines, p et q, de $A(x)$.

Montrer qu'il existe une infinité de polynômes $B(x)$ et $C(x)$ dépendant d'un paramètre et vérifiant $A^2(X)+B^2(X)=C^2(x)$.

3. Montrer qu'entre les racines, p et q, de $A(x)$ et les racines, r et s, de $B(x)$ il existe une relation indépendante du paramètre précédent et que l'on explicitera.

Partie C

Les nombres réels p et q, racines de $A(x)$, étant fixés, il existe une infinité de polynômes $C(x)$ calculés à la partie B, 2. On appellera $X+\text{i}Y$ et $X-\text{i}Y$ les racines de $C(x)$.
Montrer qu'entre X, Y et p, q il existe une relation, que l'on explicitera.
Quelle est la courbe géométrique décrite, dans un repère orthonormé, par l'ensemble des points de coordonnées X, Y ?