Baccalauréat C Nancy juin 1966

Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

1. Trouver le module et l'argument du nombre complexe

$$z = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}.$$

2. Soit θ un nombre réel tel que $0 \leqslant \theta < 2\pi$.
Trouver le module et l'argument du nombre complexe

$$\omega = \sin 2\theta + 2\mathrm{i} \sin 2\theta.$$

EXERCICE 1

Le plan est rapporté à un système d'axes orthonormé Ox, Oy. On donne un nombre réel $a > 0$. Soit k un nombre réel. On désigne par (T_k) la transformation ponctuelle dans laquelle le point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ a pour image le point M$'$ de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ définies par les formules

$$x = \frac{ax}{(1-k)x+ak} \quad \text{et} \quad y = \frac{ay}{(1-k)x+ak}.$$

1. **a.** Quelle est cette transformation pour $k = 1$?
On suppose désormais $k \neq 1$.

b. Quels sont les points M qui n'ont pas de transformé ?
On suppose désormais que M n'est pas l'un de ces points.

c. Montrer que la droite MM$'$ passe par O.

d. Déterminer l'ensemble des points M qui coïncident avec leur transformé.

e. Montrer que, pour que la transformation (T_k) soit involutive, il faut et il suffit que $k = -1$.

2. Dans toute cette partie, on suppose que $k = -1$.

a. Soit P le conjugué harmonique de O par rapport au segment MM$'$.
Quand M varie, quel est l'ensemble des points P ?

b. En déduire une construction de M$'$, connaissant M.

c. Quelle est l'enveloppe de la polaire de O par rapport au cercle de diamètre MM$'$, quand M varie ?

d. Étudier le transformé du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 = 1.$$

On discutera, selon les valeurs de a, la nature de la courbe obtenue.
Parmi ces courbes se trouve une parabole, dont on précisera le foyer et la directrice.

e. Soit A le point de Ox d'abscisse $\dfrac{2a}{3}$. Déterminer son transformé, B, et le transformé du cercle de diamètre AB.

3. **a.** Étudier la transformation pour $k = 0$.

b. Pour quelles valeurs de k la transformation (T_k) est-elle égale au produit de (T_k) par (T_k) ?