Baccalauréat C Nice juin 1966

Mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

On donne un angle quelconque $x\mathrm{O}y$. Un point M décrit la demi-droite Ox. Un point N varie sur Oy de façon que ON − OM = ℓ, ℓ étant une longueur donnée.

1. Trouver le lieu du milieu, α, du segment MN. (On peut utiliser la voie analytique, les axes étant Ox, Oy.)
2. On appelle β le point du segment MN tel que $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{M}\beta}}{\overrightarrow{\mathrm{MN}}} = k$, k étant un nombre donné.
   Trouver le lieu de β quand M varie.

EXERCICE 2

On donne un repère orthonormé et le cercle de centre O (origine du repère), de rayon R et orienté dans le sens trigonométrique. On appelle A le point (+ R ; 0) et A' le point (−R ; 0) ; M et N désignent deux points quelconques du cercle et l'on pose

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) = a, \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{ON}}\right) = b,$$

a et b étant les mesures en radians des angles correspondants, comprises entre 0 et 2π.

1. Démontrer que l'équation de la droite MN peut s'écrire

$$x = \cos\frac{a+b}{2} + y\sin\frac{a+b}{2} - \mathrm{R}\cos\frac{a-b}{2} = 0.$$

2. On suppose que la droite MN coupe l'axe $y'\mathrm{O}y$ en 1 et l'on appelle C le deuxième point où la droite AI recoupe le cercle. C sera appelé « point associé » au couple de points M, N et l'on pose $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) = c$ (c compris entre 0 et 2π).

Former la relation liant les trois nombres a, b et c.
À cet effet, on formera d'abord l'équation de la droite AC, puis on exprimera que les droites MN et AC coupent $y'\mathrm{O}y$ au même point.
Montrer que la relation trouvée peut s'écrire, en général,

$$\mathrm{tg}\,\frac{c}{2} = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{a}{2} + \mathrm{tg}\,\frac{b}{2}}{1 + \mathrm{tg}\,\frac{a}{2}\mathrm{tg}\,\frac{b}{2}}.$$

Où se trouve C lorsque l'un des points M, N est confondu avec A$'$?
Lorsque la droite MN est parallèle à $y'\mathrm{O}y$, quel point la relation trouvée permet-elle d'associer au couple M, N ?

3. Exprimer $\sin c$ et $\cos c$ en fonction rationnelle de $\sin a, \sin b, \cos a, \cos b$.
4. On donne, sur le cercle, trois points, X, Y et Z, définis par

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OX}}\right) = x, \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OY}}\right) = y, \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OZ}}\right) = z$$

(x, y, z compris entre 0 et 2π). Au couple (X ; Y) il correspond, d'après le 2., un « point associé » P ; on note $x \circ y$ l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)$.

De même, on notera Q le « point associé » au couple $(Y~;~Z)$ et $y \circ z$ l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}},~\overrightarrow{\text{OQ}}\right)$.
On pose

$$\text{tg}\,\frac{x}{2} = t_1,\quad \text{tg}\,\frac{y}{2} = t_2,\quad \text{tg}\,\frac{z}{2} = t_3.$$

Démontrer que

$$\text{tg}\,\frac{(x \circ y) \circ z}{2} = \text{tg}\,\frac{x \circ (y \circ z)}{2} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_1 t_2 t_3}{1 + t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3}.$$

Donner la construction, sur le cercle, des points U et V tels que

$$\left(\overrightarrow{\text{OA}},~\overrightarrow{\text{OU}}\right) = x \circ (y \circ z) \text{ et } \left(\overrightarrow{\text{OA}},~\overrightarrow{\text{OV}}\right) = (x \circ y) \circ z,$$

à partir de X, Y, Z.
Énoncer la propriété géométrique correspondant à l'égalité trouvée.