∽ Baccalauréat Poitiers–Limoges juin 1966 ∾
Mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Déterminer les fonctions y de la variable x vérifiant l'équation

$$2y' + 3y = 0.$$

Soit y_1 la fonction y particulière qui prend la valeur e (e : base des logarithmes népériens) lorsque $x = -\dfrac{2}{3}$.
Étudier cette fonction et construire son graphe.
Préciser, à 10^{-4} près, la valeur de y_1 pour $x = 1$.
Montrer que tous les graphes des fonctions y se déduisent du graphe de la fonction y_1 par une transformation géométrique simple.

EXERCICE 2

On donne, dans un repère orthonormé $(\text{O}x, \text{O}y)$, le cercle (C) de centre O et de rayon $a (a > 0)$. On appelle (D) la polaire d'un point M par rapport à (C), H le point d'intersection de (D) et OM.

1. On suppose que M décrit un cercle (Γ). Trouver l'ensemble des points H et l'enveloppe de la droite (D).

   Discuter la nature de cette enveloppe suivant la position de O par rapport à (Γ).
2. Soit x_0 ; y_0 les coordonnées de M ; établir l'équation de (D). [R décrivant la droite (D), on pourra utiliser le produit scalaire $\overrightarrow{\text{OR}} \cdot \overrightarrow{\text{OM}}$.]

   Calculer, en fonction de x_0 et y_0, les coordonnées des points P et Q d'intersection de (D) avec Ox et Oy.

   Montrer analytiquement que, si (D) passe par un point fixe de coordonnées p et q, M décrit une droite fixe, dont on formera l'équation en fonction de p et q. Expliquer géométriquement le résultat.
3. Soit M$'$ le quatrième sommet du rectangle OPM$'$Q construit sur OP et OQ comme côtés. Calculer les coordonnées de M$'$ en fonction des coordonnées x_0 et y_0 de M.

   Montrer que l'on a ainsi défini une transformation ponctuelle associant M$'$ à M.

   Comment doit-on choisir M pour que M$'$ soit défini ?

   La transformation est-elle involutive ?

   Quels sont ses points doubles ?

   Trouver, en fonction de x_0 et y_0, l'équation du cercle (L) de diamètre MM$'$ et montrer que la puissance de l'origine par rapport à ce cercle est constante.

   En déduire que le cercle (L) est orthogonal à un cercle fixe.

   On suppose que le milieu de MM$'$ décrit une droite (Δ). Montrer que le cercle (L) appartient alors à un faisceau, dont on discutera la nature suivant la distance de O à (Δ). Donner une construction simple des points remarquables de ce faisceau dans chaque cas.
4. Montrer que, si M décrit une droite d'équation $ux + vy + w = 0$, M$'$ décrit une hyperbole, dont on donnera l'équation en fonction de u, v et w. Soit (H) l'hyperbole correspondant à la droite

$$x + 2y - a = 0.$$

Construire (H) dans un repère orthonormé (unité : 1 cm).

Déterminer, à $\dfrac{1}{100}$ près par défaut, l'aire (S) comprise entre (H), l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = -3$.