∽ Baccalauréat C Reims juin 1966 ∽

Mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Étant donné, dans un plan, une droite (Δ) et deux droites (T) et (T′), discuter l'existence d'une parabole admettant (Δ) comme directrice et tangente à (T) et (T′). On cherchera, pour cela, à construire le foyer de cette parabole.

EXERCICE 2

Déterminer les progressions géométriques de sept termes (à termes réels) telles que la somme des trois premiers termes est égale à 2 et la somme des trois derniers termes est égale à 1 250.

EXERCICE 3

On considère l'application qui, à tout nombre complexe z différent de -1, associe le nombre Z défini par la formule

$$Z = \frac{z^2+5z+6}{z+1} \quad (z \neq -1).$$

1. Déterminer les constantes a et b telles que

$$Z = z + a + \frac{b}{z+1}.$$

2. On suppose que z décrit le corps des réels (sauf la valeur -1). b) Déterminer tous les entiers z tels que Z soit entier .

- **a.** Étudier les variations de la fonction qui, à z, fait correspondre Z. Représenter le graphe, (H), de cette fonction par rapport à un repère orthonormé, Oz, OZ.
- **b.** Soit C le point de rencontre des asymptotes de (H), $\overrightarrow{\imath}$ le vecteur unitaire de Oz, $\overrightarrow{I}$ le vecteur unitaire de OZ, $\overrightarrow{\jmath}$ le vecteur unitaire défini par $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ dans le plan orienté zOZ.

  Si M est un point de (H), exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{CM}}$ sous la forme $\overrightarrow{\text{CM}} = u\overrightarrow{\jmath} + v\overrightarrow{I}$, où u et v sont des fonctions de z, que l'on demande de déterminer.

  En déduire que (Hl est une hyperbole, dont on demande la distance focale.
- **c.** Calculer l'aire, S, du domaine compris entre OZ, la courbe (H), la droite d'équation $Z = z+4$ et la droite d'équation $z = \mathrm{e} - 1$, où e est la base des logarithmes népériens (on pourra effectuer la translation des axes de coordonnées amenant l'origine au point d'abscisse -1 de l'axe Oz).

3. On suppose que z décrit le corps des complexes (sauf la valeur -1) et l'on pose

$$z = x + \mathrm{i}y, \quad Z = X + \mathrm{i}Y.$$

- **a.** Déterminer X et Y en fonction de x et y.
- **b.** Au nombre complexe z on associe son image, P(x ; y), dans le plan complexe. Quel est l'ensemble des points P tels que Z soit réel ?

  Donner alors, suivant les cas trouvés, l'expression de Z en fonction de la seule abscisse, x, du point P.

4. On suppose que z décrit le corps des rationnels (sauf la valeur -1).

a. Démontrer que, si Z est entier, z est nécessairement entier (on prendra z sous forme d'une fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$).

Il s'agit, dans ces deux dernières questions, d'entiers relatifs.