∽ Baccalauréat Rennes juin 1966 ∾

Mathématiques élémentaires et Mathématiques et Technique

EXERCICE 1

Log x désigne le logarithme népérien d'un nombre positif x.

1. Calculer la dérivée de la fonction f telle que

$$f(x) = x\text{Log}\, x.$$

2. En écrivant $\text{Log}\, x = (\text{Log}\, x + 1) - 1$, calculer une primitive de $\text{Log}\, x$.
3. Calculer l'aire du triangle mixtiligne délimité par le graphe de la fonction g telle que $g(x) = \text{Log}\, x$, l'axe Ox et la droite d'équation $x = \text{e}$, le plan étant rapporté à un repère orthonormé $x\text{O}y$.

EXERCICE 1

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $x'\text{O}x,\ y'\text{O}y$ on considère les points A et A$'$ de l'axe $x'\text{O}x$ d'abscisses respectives $-a$ et $a\,(a > 0)$.
On appelle (C) le cercle de diamètre AA$'$, (T) et (T$'$) les tangentes en A et en A$'$ à ce cercle. On désigne par (Δ) une droite qui coupe (T) et (T$'$) respectivement en B et B$'$, d'ordonnées λ et λ'.

1. Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que (Δ) soit tangente au cercle (C) se traduit par la relation $\lambda\lambda' = a^2$.
2. Soit (D) la droite d'équation $x = 3a$. Par le point M de (D) d'ordonnée m on mène les tangentes au cercle (C), qui coupent la droite (T) en P et Q d'ordonnées λ et μ.
   Montrer que λ et μ sont les racines de l'équation en u

$$u^2 + mu - 2a^2 = 0.$$

3. Montrer que le centre de gravité du triangle MPQ reste fixe lorsque M décrit (D) et qu'il est aussi l'enveloppe des polaires des points de (D) par rapport au cercle (C).
4. Montrer que les cercles (Ω) de diamètre PQ appartiennent à un faisceau ($\mathcal{F}$) à points de base. Ceux-ci seront appelés I et J.
   Montrer que l'axe radical du cercle variable (Ω) et du cercle (C) passe par un point fixe.
5. Montrer que les polaires de chaque point M de (D) par rapport à tous les cercles du faisceau ($\mathcal{F}$) sont concourantes en un point N. [On associe ainsi à chaque point M de (D) un point N du plan.]
   Prouver que tout cercle de diamètre MN appartient au faisceau dont les points limites sont I et J.
   Déterminer l'équation du cercle de diamètre MN par rapport au repère $X'\text{A}X,\ Y'\text{A}Y$ déduit du repère $x'\text{O}x,\ y'\text{O}y$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{OA}}$.
   Quel est le lieu du point N lorsque le point M décrit la droite (D) ?
6. On suppose maintenant que le point M d'ordonnée m décrit la droite (D) suivant la loi horaire

$$m = 2at.$$

   Étudier alors le mouvement du point N sur son lieu, en caractérisant le vecteur accélération de ce mouvement.