

∞ Baccalauréat Sud Viet-Nam juin 1966 ∞
Mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

1. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe

$$z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}.$$

2. Déterminer les entiers naturels n ($n \neq 0$) tels que z^n soit réel. Calculer z^n correspondant à la plus petite des valeurs de n obtenues.
3. Déterminer les entiers naturels n tels que z^n soit imaginaire pur.

EXERCICE 2

1. Étudier les variations des fonctions

$$y_1 = \frac{\sqrt{33}}{2} (x - \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{\sqrt{33}}{2} (x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Construire leurs graphes, (C_1) et (C_2) , dans un repère orthonormé, $x'Ox$, $y'Oy$, dont les vecteurs unitaires auront pour module 2 cm.

On étudiera avec soin les branches infinies de (C_1) et (C_2) .

2. On désigne par (H) la réunion de (C_1) et (C_2) .

Montrer que, pour qu'un point $M(x; y)$ du plan appartienne à (H) , il faut et il suffit que

$$y^2 - \sqrt{3}xy + \frac{3}{4} = 0.$$

On rapporte le plan au nouveau repère normé $X'OX$, $Y'OY$ défini par

$$\left(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{X'X} \right) = 0 \pmod{2\pi}, \quad \left(\overrightarrow{X'X}, \overrightarrow{Y'Y} \right) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

Établir les relations liant les coordonnées $(x; y)$ et $(X; Y)$ d'un point du plan dans l'ancien et le nouveau repère.

Quelle est l'équation de (H) dans ce nouveau repère ?

En déduire que (H) est une hyperbole, dont on déterminera les foyers, F et F' , les sommets et l'excentricité.

3. M étant un point de l'hyperbole (H) , quelconque mais distinct des sommets, on désigne par T et N les points d'intersection de l'axe transverse de (H) avec, respectivement, la tangente et la normale en M à (H) , par T' et N' les points d'intersection de l'axe non transverse avec cette tangente et cette normale.

- a. Montrer que les cinq points F, F', M, N' et T' sont sur un même cercle.
- b. Prouver que les cercles de diamètre NT et $N'T'$ sont orthogonaux.
- c. Établir les relations

$$\overline{ON'} \cdot \overline{OT'} = -2 \quad \text{et} \quad \overline{ON} \cdot \overline{OT} = 2.$$