Baccalauréat Tahiti juin 1966
Mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Un plan est rapporté à un repère orthonormé Ox,Oy.
$(p~;~q)$ étant un couple de nombres réels, à chaque point C$(p~;~q)$ du plan on fait correspondre le barycentre, G, du système des trois points A$(q~;~0)$, B$(0~;~p)$, C$(p~;~q)$ affectés de coefficients égaux à 1.

1. Calculer les coordonnées de G, en fonction de p et q.
   Quel est l'ensemble (D) des points G lorsque le couple $(p~;~q)$ varie ?
   Soit G_0 un point de (D) d'abscisse λ. Trouver l'ensemble (Δ) des points C qui ont pour correspondant le point G_0 ?
   En déduire que l'application qui transforme C en G est la composée (ou produit) de deux transformations simples.
2. Étant donné un couple $(p~;~q)$ fixe, montrer que l'ensemble des points M du plan tels que

$$\text{MA}^2+\text{MB}^2+\text{MC}^2=2\left(p^2+q^2\right)$$

   est un cercle (Γ) passant par O.
   Quel est l'ensemble des cercles (Γ) lorsque le couple $(p~;~q)$ varie ?

EXERCICE 2

On donne, dans un repère orthonormé Ox, Oy, un cercle (C) de centre O, de rayon $a\sqrt{2}$. On désigne, par A et B les points dont les coordonnées sont A$(x=-a,~y=a)$, B$(x=-a,~y=-a)$ $a>0$.
Soit P un point variable du cercle (C) distinct de A et B et défini par $\left(\overrightarrow{\text{O}x},~\overrightarrow{\text{OP}}\right)=\theta$.
Les droites PA et PB coupent respectivement Oy en M et N. On pose $\overrightarrow{\text{PM}}=\lambda\overrightarrow{\text{PA}}$.

1. Montrer que

$$\lambda=\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{1+\sqrt{2}\cos\theta}.$$

2. Calculer, en fonction de a et de θ, la mesure algébrique, u, sur Oy, du vecteur $\overrightarrow{\text{MN}}$.
   Étudier la variation de u lorsque θ varie dans l'intervalle $(-\pi~;~+\pi)$.
   Construire le graphe de cette fonction.
   En utilisant ce graphe, indiquer le nombre des points P du cercle (C) pour lesquels la distance MN est égale à la distance AB.
   Donner une construction géométrique de ces points.
   Calculer les valeurs de θ correspondantes, en degrés, minutes et secondes, à l'aide dune table de logarithmes. (Donner seulement les valeurs comprises entre -180 °et $+180$ °.)
3. Calculer, en fonction de θ, le rapport, z, des aires des triangles PMN et PAB.
   Étudier la variation de z lorsque θ varie dans l'intervalle $(0~;~\pi)$. (Le graphe n'est pas demandé, mais on dressera le tableau de variation.)

4. Soit ω le centre du cercle (Γ) circonscrit au triangle PMN. Établir que $\overrightarrow{\text{O}\omega} = (1-\lambda)\overrightarrow{\text{OP}}$, λ étant le nombre réel déterminé au 1.
Calculer les coordonnées de ω en fonction de θ.
Prouver que le cercle (Γ) a pour équation

$$\left(1+\sqrt{2}\cos\theta\right)\left(x^2+y^2\right)-2a\sqrt{2}(x\cos\theta+y\sin\theta)+2a^2\left(1-\sqrt{2}\cos\theta\right)=0.$$

Pour quelles valeurs de $\cos\theta$ le cercle (Γ) est-il tangent à l'axe Oz ?
Pour chacune de ces valeurs, on calculera l'abscisse du point de contact de (Γ) avec Ox.

5. Démontrer qu'il existe un point I de Ox ayant la même puissance pour tous les cercles (Γ). En déduire :

a. qu'il existe un cercle (I) centré en I et orthogonal à tous les cercles (Γ) ;

b. que les cercles (Γ), déjà tangents à (C), sont tangents à un second cercle, (C$'$) ; préciser le rayon de (C$'$) et l'abscisse de son centre.

6. Soit H la projection orthogonale de ω sur la droite (Δ) d'équation $x = a$. Calculer la longueur ωH en fonction de θ.
Que peut-on dire du rapport $\dfrac{\omega\text{O}}{\omega\text{H}}$?
Quelle est la nature de la courbe (L) sur laquelle se déplace ω ?
Préciser les points d'intersection de (L) avec l'axe Oy ; montrer qu'en ces points, (L) est tangente au cercle (I).