Aix-Marseille juin 1967
Baccalauréat mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Déterminer le module et l'argument de chaque solution de l'équation

$$z^4 - z^2\sqrt{2} + 1 = 0,$$

où z appartient au corps des nombres complexes.

EXERCICE 2

Étant donné deux cercles, (C) et (C'), de rayons R et R', tangents extérieurement en A, déterminer l'inversion (pôle et puissance) qui transforme le cercle (C) en une droite (d) tangente à (C') et le cercle (C') en une droite (d') tangente à (C).
En déduire une construction de deux cercles, (Γ) et (Γ'), orthogonaux, tangents tous deux aux cercles (C) et (C').

PROBLÈME

1. Soit m un paramètre réel strictement positif.
   a. On considère les polynômes
   $$P(x) = x^2 + mx - 2 \quad \text{et} \quad Q(x) = mx - 1.$$
   Pour quelle valeur de m le polynôme $P(x)$ est-il divisible par $Q(x)$?
   b. On suppose, dans toute la suite du problème, que m, qui reste strictement positif, est différent de 1.
   Soit f la fonction définie, pour tout réel x différent de $\dfrac{1}{m}$, par
   $$f(x) = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}.$$
   On désigne par C_m la courbe représentative par rapport à un repère orthonormé $x\text{O}y$, de la fonction f correspondant à la valeur m du paramètre.
   Pour quelles valeurs de m la fonction f admet-elle un maximum (relatif) ?
   Construire C_2 et C_1.
   (On ne demande pas la construction de C_m dans le cas général).
   Montrer que les courbes C_m passent par trois points fixes.
2. Soit $y = kx$ l'équation d'une droite D_k passant par O. Établir une équation dont les racines sont les abscisses des points d'intersection de C_m et D_k.
   Comment faut-il choisir m pour que toutes les droites D_k coupent C_m ?
3. On se donne un point M distinct de O, de coordonnées x_1 et y_1 et l'on écrit les équations paramétriques de la droite $\text{O}M_1$ sous la forme
   $$x = \frac{x_1}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1}{1+\lambda}.$$
   Donner une signification géométrique du paramètre λ.
   Montrer que, pour que le point de paramètre λ appartienne à C_m, il faut et il suffit que λ soit solution d'une équation du second degré, qu'on établira.
   Quelle inégalité m doit-il vérifier pour qu'un des points d'intersection, et un seul, appartienne au segment $\text{O}M_1$?

4. On se donne un nombre réel, a, et l'on considère une courbe C_m correspondant à une valeur $m < 1$.

Quel est l'ensemble Δ_m des points M_1 tels que la droite OM_1 coupe C_m en deux points M' et M'' et que

$$\frac{\overline{M'M_1}}{\overline{M'\mathrm{O}}} + \frac{\overline{M''M_1}}{\overline{M''\mathrm{O}}} = a\ ?$$

Montrer que, si m varie et si a reste fixe, Δ_m passe par un point fixe.