Bordeaux juin 1967
Baccalauréat mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Calculer tg $\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)$ et tg $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$ et utiliser le résultat obtenu pour résoudre l'équation

$$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=2\cos x.$$

EXERCICE 2

1. Soit y_1 la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1(x) & = & 3x+\dfrac{\sqrt{4x^2}}{x} \quad \text{si } x\neq 0\\ y_1(0) & = & 2.\end{array}\right.$$

   Étude de la continuité pour $x=0$.
   Représentation graphique.
2. Soit y_2 la fonction définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_2(x) & = & 3x+\dfrac{\sqrt{4x^2}}{|x|} \quad \text{si } x\neq 0\\ y_2(0) & = & 2.\end{array}\right.$$

   Étude de la continuité pour $x=0$.
   Représentation graphique.

EXERCICE 3

Dans un repère quelconque, d'axes Ox, Oy, de vecteurs unitaires respectifs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, dans le plan, on considère les points A et A$'$ tels que $\overrightarrow{\text{OA}}=\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{\text{OA}'}=-\vec{\imath}$ et B tel que $\overrightarrow{\text{OB}}=\vec{\jmath}$.
Soit Δ la droite parallèle à Ox menée par B.
On se propose d'étudier la transformation ponctuelle, T, qui, à un point M du plan, fait correspondre le point $M'=T(M)$ défini par les conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{O}, M, M' \text{ sont alignés,}\\ \text{A}M \text{ et } \text{A}'M' \text{ se coupent sur } \Delta.\end{array}\right.$$

Partie A

1. Quels sont les points du plan où la transformation T n'est pas définie ? (Dans toute la suite, les figures dont il sera question seront supposées privées de ces points.)
   Quels sont les points doubles ?
   Calculer les coordonnées, x' et y', de M' en fonction des coordonnées, x et y, de M.
2. La transformation T est-elle involutive ? (Donner une démonstration analytique.)

Partie B

Étude de l'image d'une droite par la transformation T.

1. Soit D une droite, d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$.
   Montrer analytiquement que son image est une droite, D$'$.
2. Si D coupe Δ, étudier les intersections de D et D$'$ avec Ox (soit C et C$'$ ces points).
   En déduire un méthode de construction rapide de D$'$ à partir de D.
3. D et D$'$ peuvent-elles être parallèles ou confondues et dans quels cas ?

Partie C

1. Montrer géométriquement que, si O$'$ est l'intersection de la droite OM avec t :J. et M' l'image de M par T, les points O, O$'$, M, M' forment une division harmonique.
   Retrouver géométriquement les résultats de A 2. et B 1.
2. On fait varier M sur une droite passant par O et distincte de Ox. Que peut-on dire des cercles de diamètre MM' ?
3. Soit ω la projection orthogonale de O sur Δ.
   Si M est sur Oω (et distinct du milieu de Oω), montrer que le cercle de diamètre MM' est invariant par la transformation T.

Partie D

En repère orthonormé d'origine O, en supposant que B = ω et que OB = OA, on donnera l'équation du cercle de diamètre Oω, puis celle de l'image de ce cercle par T. Reconnaître ensuite cette figure, en faisant une translation d'axes avec, comme nouvelle origine, le milieu de Oω.