

∞ Rennes juin 1967 ∞
Baccalauréat mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

1. Soit f la fonction qui, à tout nombre réel x , fait correspondre le nombre réel $f(x)$:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Étudier les variations de cette fonction et tracer son graphique, (C) , dans un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

2. Soit g la fonction qui, à tout nombre réel x différent de 1, fait correspondre le nombre réel $g(x)$:

$$g(x) = \frac{|(x-1)(2x+1)|}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

et au nombre 1 fait correspondre le nombre 1.

$|(x-1)(2x+1)|$ signifie : valeur absolue du produit $(x-1)(2x+1)$.

La fonction g est-elle continue pour $x=1$; pour $x=-\frac{1}{2}$?

La fonction g est-elle dérivable pour $x=-\frac{1}{2}$?

Comment peut-on déduire le graphique, (C') , de la fonction g du graphique, (C) , de la fonction f ?

EXERCICE 2

Déterminer deux nombres entiers naturels dont la différence est 22 932 et dont le PPCM (plus petit commun multiple) est 98 280.

EXERCICE 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit $\overrightarrow{x'Ox}$ et $\overrightarrow{y'Oy}$ les axes. A et B sont deux points variables de $x'Ox$, d'abscisses respectives a et b . C est un point fixe de $y'Oy$, d'ordonnée c positive ; C' est le symétrique de C par rapport à O.

Soit (\mathcal{A}) le cercle de centre A et de rayon AC, (\mathcal{B}) le cercle de centre B et de rayon BC. La tangente CT en C au cercle (\mathcal{A}) et la tangente $C'T'$ en C' au cercle (\mathcal{B}) ont, en général, un point commun, M .

Le problème a pour objet l'étude de quelques ensembles de points M, dans des cas qui peuvent être traités *indépendamment les uns des autres*.

1. Déterminer les coordonnées de M . En déduire l'ensemble (E_1) des points M lorsque les points A et B varient sur $x'Ox$ en restant symétriques par rapport à un point fixe, K, d'abscisse k ($k \neq 0$).

Indiquer une construction simple de (E_1) lorsque le point K est donné.

2. Les points A et B varient de telle sorte que $\overline{AB} = \ell$, ℓ étant un nombre positif donné.

Déterminer analytiquement et construire l'ensemble (E_2) des points M correspondants.

Que devient (E_2) si l'on suppose $\overline{AB} = -\ell$?

3. Les cercles (\mathcal{A}) et (\mathcal{B}) varient maintenant en se coupant sous un angle constant, c'est-à-dire que, si CT_1 est la tangente en C à (\mathcal{B}) ,

$$(CT, CT_1) = V \pmod{\pi},$$

V étant un nombre donné $\left(-\frac{\pi}{2} < V \leq \frac{\pi}{2}\right)$. Calculer $\operatorname{tg} V$ en fonction de a, b et c .

- a. Déterminer analytiquement et construire l'ensemble (E_3) des points M quand $V = \frac{\pi}{2}$.
- b. Déterminer l'équation cartésienne, par rapport aux axes $x'Ox$ et $y'Oy$, de l'ensemble (E_4) des points M pour V tel que $-\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2}$.

On considère, dans le plan, un nouveau repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , lié au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) par les relations

$$\begin{cases} \vec{u} &= \vec{i} \sin \frac{V}{2} + \vec{j} \cos \frac{V}{2} \\ \vec{v} &= -\vec{i} \cos \frac{V}{2} + \vec{j} \sin \frac{V}{2} \end{cases}$$

Déduire de ces relations et des égalités

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{u} + Y\vec{v}.$$

les coordonnées, x et y , d'un point M dans le repère initial (O, \vec{i}, \vec{j}) , en fonction des coordonnées, X et Y , de ce point dans le nouveau repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Écrire l'équation de (E_4) dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) et préciser la nature de cet ensemble. Construire (E_4) .

4. Cette question a pour but de retrouver géométriquement (E_1) et (E_2) . Elle est indépendante de la question 3.

Soit B' le point symétrique du point B par rapport à O . Démontrer que les triangles MCC' et CAB' sont semblables.

Lorsque les points A et B varient sur $x'Ox$ en restant symétriques par rapport à un point fixe K , d'abscisse k , calculer $\overline{AB'}$.

En déduire géométriquement l'ensemble (E_1) des points M correspondants.

Lorsque les points A et B varient de telle sorte que $\overline{AB} = \ell$, quelle relation existe-t-il entre les points A et B' ?

En déduire l'ensemble (E_2) des points M correspondants.