

∞ Baccalauréat Tahiti septembre 1967 ∞

SÉRIES MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES ET MATHÉMATIQUES ET TECHNIQUE

Exercice 1

Résoudre l'équation

$$\frac{1}{2} \text{Log}|x-1| - \text{Log}|x+1| = 0.$$

Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, on considère le point A , de coordonnées $+1, -2, +2$, et le vecteur \vec{V} , de composantes scalaires $+3, +2, +1$.

Écrire les coordonnées paramétriques d'un point M de la droite (D) menée par A et parallèle à \vec{V} .

En déduire les coordonnées du point où la droite (D) perce le plan xOy .

Calculer la distance de l'origine, O , à un point M quelconque de (D) ; en déduire la distance de O à la droite (D) .

Exercice 3

On rappelle qu'une application \mathcal{A} d'un ensemble E dans lui-même associe à tout x élément de E un élément de E appelé image de x . \mathcal{A} est dite bijective ou biunivoque si tout élément de E est l'image d'un élément unique de E .

Soit P un plan rapporté à un repère orthonormé $x'Ox, y'Oy$ et M un point de P de coordonnées x, y . On considère le cercle (C) tangent en O à $x'Ox$ et passant par M ; on désigne par M' le point diamétralement opposé à M sur le cercle (C) .

1. Montrer que les coordonnées, x' et y' , de M' , quand M' existe, sont données par

$$x' = -x, \quad y' = \frac{x^2}{y}$$

On désigne par Π l'ensemble des points de P non situés sur les axes. Montrer que la transformation θ qui, à M , associe M' [$M' = \theta(M)$] est une application bijective de Π sur lui-même. θ est-elle involutive ?

2. On désigne par H une homothétie de centre O et de rapport k , par S la symétrie par rapport à $x'Ox$, par T la symétrie par rapport à $y'Oy$.

Montrer que les produits $\theta \circ H$, $\theta \circ S$ et $\theta \circ T$ sont commutatifs (on pourra faire un raisonnement analytique ou un raisonnement géométrique).

3. Si (C) est une courbe de Π , lieu d'un point M , l'ensemble des transformés $M' = \theta(M)$ est une courbe, notée (C') , et appelée transformée de (C) par θ .

Que peut-on dire des transformées de deux courbes homothétiques par rapport à O ?

Si (C) admet $x'Ox$ comme axe de symétrie, quelle propriété possède (C') ?

4. On donne une droite (D) et l'on se propose d'étudier la transformée (Δ') de $(\Delta) = \Pi \cap (D)$.

- a. Déterminer (Δ') si (D) est parallèle à $x'Ox$ ou si (D) passe par l'origine O .
b. Déterminer (Δ') si (D) est parallèle à $y'Oy$.

Soit P la parabole d'équation, $y = \frac{x^2}{2p}$; quelle est la transformée de $\Pi \cap P$?

- c. (D) a pour équation $y = a(x + b)$, $ab \neq 0$.

Déterminer (Δ') par son équation et construire (Δ') . (Δ') admet une asymptote oblique, que l'on demande de construire à partir de (D) .

5. On considère un point $M_0(x_0; y_0)$ et son transformé par θ , $M'_0(x_0; y_0)$; soit M un point de coordonnées $x_0 + h; y_0 + k$, qui a pour transformé M' dont les coordonnées sont désignées par $x'_0 + H$ et $y'_0 + K$.

Calculer $\frac{K}{H}$ en fonction de x_0, y_0, h, k .

En déduire que, si une courbe passant par M_0 a, en ce point, une tangente, la courbe transformée a, au point M'_0 , une tangente, dont la pente dépend de celle de la tangente en M_0 .

NOTA - Les questions 4 et 5 peuvent être traitées indépendamment des questions 2 et 3.