Baccalauréat C Abidjan juin 1971

EXERCICE 1

On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' + y = 2x.\mathrm{e}^{-x},$$

dans laquelle x est une variable réelle quelconque, y une fonction inconnue de la variable x (qu'il s'agit précisément de déterminer).

1. Montrer que $y = \mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation sans second membre (c'est-à-dire de $y' + y = 0$).
2. On pose alors $y = z.\mathrm{e}^{-x}$, définissant ainsi une nouvelle fonction z dont la dérivée est notée z'. Calculer y' en fonction de x, z et z' et former l'équation satisfaite par z' en reportant y' et y dans (1).
3. En déduire toutes les solutions de (1).
   Soit y_1 la fonction particulière qui s'annule pour $x = 0$. Construire la représentation graphique de y_1 dans un repère orthonormé.

EXERCICE 2

Soit les deux transformations T_1 et T_2 définies pour tout point du plan par

$$M(x\,;\,y) \xmapsto{T_1} M_1\left(x_1\,;\,y_1\right) \quad \text{et} \quad M(x\,;\,y) \xmapsto{T_2} M_2\left(x_2\,;\,y_2\right)$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l c l} x_1 & = & 1 - y,\\ y_1 & = & x - 2\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l c l} x_2 & = & 2x - \dfrac{3}{2},\\ y_2 & = & 2y + \dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

1. Montrer que T_1 est une rotation $R(\omega,\,\theta)$. (On déterminera ω et θ.)
2. Montrer que T_2 est une homothétie, H, de même centre que la rotation.
3. En déduire $T_1 \circ T_2$ et $T_2 \circ T_1$. Quelle est la nature de ces transformations ?

PROBLÈME

On désigne par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et par (D) l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples $(x\,;\,y)$ de nombres réels muni de l'addition H de la multiplication suivantes :

$$(x\,;\,y) + \left(x'\,;\,y'\right) = \left(x + x'\,;\,y + y'\right)$$

et

$$(x\,;\,y).\left(x'\,;\,y'\right) = \left(x.x'\,;\,xy' + yx'\right).$$

Partie A

Prouver que $(D,\ +,\ .)$ est un anneau commutatif, possédant pour unité l'élément (+ 1 ; 0).
Les éléments de (D) seront alors appelés nombres duaux.

Partie B

On note (D_1) [respectivement (D_2) l'ensemble des nombres duaux de la forme $(x\,;\,0)$ [respectivement de la forme $(0\,;\,y)$].

1. Trouver que (D_1) est un sous-anneau de (D).
2. (D_2) est-il un sous-anneau de (D) ?
3. (D) peut-il être un corps ?
4. Prouver que $f\,:\,x \longmapsto (x\,;\,0)$ est un isomorphisme de l'anneau $\mathbb{R}$ sur (D_1).

Partie C

L'isomorphisme de la question B, 4. nous permet, dans la suite du problème, d'identifier (D_1) à $\mathbb{R}$, en posant $(x\,;\,0) = x$ pour tout élément $(x\,;\,0)$ de (D_1).

1. Prouver que tout nombre dual z peut s'écrire d'une manière, et d'une seule, sous la forme

$$z = x + \epsilon y,$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $\epsilon = (0\,;\,+1)$.
2. Étudier les puissances ϵ^p de ϵ, $\left(p \in \mathbb{N}^\star\right)$.
3. Calculer z^n pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
4. Rechercher les éléments inversibles de (D).

Partie D

Soit $z = x + \epsilon y$ un nombre dual. On pose

$$\overline{z} = x - \epsilon y$$

et l'on définit le symbole $|z|$ en posant $|z| = |x|$, où le second membre désigne la valeur absolue du réel x.

1. Prouver que $z.\overline{z} = |x|^2$.
2. Prouver que $\left|z.z'\right| = |z|.\left|z'\right|$.
3. Prouver que $\left|z+z'\right| \leqslant |z| + \left|z'\right|$.

Partie E

Soit $z \in (D) - (D_2)$. On pose Arg $(z) = \dfrac{y}{x}$.
Établir que

$$\text{Arg}\left(z.z'\right) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}\left(z'\right), \quad z \notin (D_2) \text{ et } z' \notin (D_2)\,.$$

Partie F

Si f est une fonction réelle d'une variable réelle, dérivable sur $\mathbb{R}$, on la prolonge à (D) en posant, pour tout $z = x + \epsilon y$ de (D),

$$f(z) = f(x) + \epsilon y f'(x).$$

1. Donner les expressions de $\cos z$ et de $\sin z$.
2. Calculer $\cos^2 z + \sin^2 z$.
3. Calculer $\cos\left(z+z'\right)$.
4. Calculer $\sin\left(z+z'\right)$.