Baccalauréat C Amiens juin 1971

EXERCICE 1

On pose $\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} = 2s \quad$ (s réel, e base des logarithmes népériens).

1. Exprimer x en fonction de s.
2. Si $s = 3$, calculer x avec la précision permise par les tables de logarithmes. (On prendra $\sqrt{10} \approx 3,162$.)

EXERCICE 2

1. Linéariser $\sin^4 x$.
2. Calculer $f(t) = \displaystyle\int_0^t \left(4\sin^4 x - \frac{3}{2}\right)\,\mathrm{d}x$.
3. Résoudre l'équation $f(t) = 0$.

PROBLÈME

Partie A

Les nombres réels x et x' sont liés par la relation $xx' = -4$.
SoiL N et N' les points d'abscisses respectives x et x' sur un axe $\left(\overrightarrow{\Delta}\right)$.
Calculer en fonction de x la longueur, notée $\ell(x)$, du segment NN' (l'unité de longueur étant celle choisie sur l'axe).
Étudier les variations de la fonction $x \longmapsto f(x)$ ainsi définie. Tracer son graphe dans un repère orthonormé. Utiliser ce graphe pour discuter l'existence et le nombre des points N tels que la longueur NN' ait une valeur donnée, k.

Partie B

On note (P) le plan complexe et $\left(\mathrm{P}^{\star}\right)$ le plan complexe privé du point $\mathrm{O}(0\,;0)$.
À tout point $M \in \left(\mathrm{P}^{\star}\right)$, image du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, on associe le point $M' \in \left(\mathrm{P}^{\star}\right)$, image du nombre complexe $z' = x' + \mathrm{i}y'$, tel que $zz' = -4$.
On note $M(z) \overset{T}{\longmapsto} M'\left(z'\right)$ la transformation ainsi définie.

1. T est-elle involutive ? Quels sont les points B et B′ invariants par T ?
2.
   a. En étudiant les arguments de z et de z', montrer que les deux demi-droites OM et OM' sont symétriques par rapport à l'un des axes de coordonnées.

   b. En complétant cette étude par celle des modules de z et de z', montrer que T est le produit de deux transformations géométriques simples, que l'on précisera.
3. Calculer les coordonnées x et y du point M en fonction des coordonnées x' et y' du point M'.
4. Écrire, quand il existe, l'équation du cercle (Ω), de centre donné $\Omega(0\ ;\ \omega)$, orthogonal au cercle de diamètre BB′. Déterminer le transformé par T de ce cercle (Ω).

   a. analytiquement,

   b. géométriquement.

5. Écrire l'équation du cercle (Γ) passant par B et par B$'$, de centre donné P$(\lambda\,;\,0)$.
Déterminer le transformé par T du cercle (Γ).
    a. analytiquement,
    b. géométriquement.
6. Conclure de ce qui précède que les points B, B$'$, M et M' sont cocycliques et que, lorsque M décrit le cercle (Γ), la droite MM' passe par un point fixe A, que l'on précisera.
En déduire une construction géométrique du point M' transformé de M par T, lorsque M n'appartient pas à l'axe $y'\text{O}y$.