Baccalauréat C Bordeaux juin 1971

EXERCICE 1

Soit A, B, C et D quatre points donnés d'un plan tels que AB et CD n'aient pas même milieu.
Déterminer les cercles (Γ) tels que les points A et B, d'une part, et C et D, d'autre part, soient conjugués par rapport à (Γ).

EXERCICE 2

1. Déterminer le reste de la division de 2^n par 3, n étant un entier naturel.
2. Déterminer le reste de la division de $(275\,423)^n$ par 3.
3. Déterminer n pour que le nombre

$$N = (275\,423)^n + (372\,121)^n$$

soit divisible par 3.

PROBLÈME

Dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considère l'équation

$$(1) \quad (z-1)Z^2 - \left[2\mathrm{i}z^2 - (3+2\mathrm{i})z + 2\right]Z - 2\mathrm{i}z + 3 = 0,$$

où $z \in \mathbb{C}$ est donné et $Z \in \mathbb{C}$ est l'inconnue.

1. **a.** Montrer que, sauf pour une valeur z_0 de z, l'équation (1) a deux racines Z_1 et $Z_2 = \dfrac{1}{1-z}$.
   Calculer Z_1.
   Étudier le cas exceptionnel $z = z_0$.

   b. Dans le plan complexe (P), rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on désigne par m l'image de z et par M_1 celle de Z_1.
   Caractériser la transformation T_1 qui à m fait correspondre M_1.
2. Soit M_2 l'image de Z_2 dans (P). On désigne par T_2 la transformation qui à m (défini au 1. b) fait correspondre M_2.

   a. Existe-t-il des points de (P) qui n'ont pas de transformé par T_2 ? Lesquels ?

   b. (E) désignant l'ensemble des points de (P) ayant des transformés, T_2 définit une application de (E) dans (P). Cette application est-elle bijective ?

   c. La transformation T_2 admet-elle des points doubles ?

   d. Calculer, relativement au repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les coordonnées X et Y de M_2 en fonction des coordonnées x et y de m ; inversement, calculer x et y en fonction de X et Y.
3. Montrer que la figure transformée par T_2 de la droite

$$(\delta) \qquad ax + by + c = 0$$

est une droite ou un cercle.
Comment faut-il choisir a, b et c pour que la transformée de (δ) par T_2 soit une droite (Δ) ?
Indiquer une construction géométrique de (Δ) connaissant (δ).

4. Si z_1, z_2, z_3 et z_4 sont quatre nombres complexes d'images respectives m_1, m_2, m_3 et m_4 appartenant à l'ensemble (E), on convient de désigner par M_2^1, M_2^2, M_2^3 et M_2^4 leurs images dans la transformation T_2 et par Z_2^1, Z_2^2, Z_2^3 et Z_2^4 les affixes respectifs de ces derniers points.

Enfin, si x, y, z et t sont quatre nombres complexes, on note (x, y, z, t) leur birapport, c'est-à-dire le nombre complexe

$$\frac{z-x}{z-y} . \frac{t-x}{t-y}$$

a. Montrer que l'on a

$$(2) \qquad (z_1, z_2, z_3, z_4) = \left(Z_2^1, Z_2^2, Z_2^3, Z_2^4\right).$$

b. Montrer que, pour avoir

$$(3) \qquad (z_1, z_2, z_3, z_4) = k, \quad k \in \mathbb{R} \text{ ($\mathbb{R}$ ensemble des réels)},$$

il faut et il suffit que m_1, m_2, m_3 et m_4 soient sur un même cercle ou soient alignés.

En déduire que la figure transformée d'un cercle par T_2 est un cercle ou une droite.

5. **a.** On considère la transformation T_3 qui à m image de z $(z \neq 0)$ associe M_3 image de Z_3 défini par

$$(4) \qquad Z_3 \,.\, z = 1$$

Calculer le module, R, et l'argument, Φ, de Z_3 connaissant le module, r, et l'argument, φ, de z.

Construire géométriquement M_3 connaissant m.

Discuter.

b. Trouver une construction géométrique de M_2 (défini au 2.) connaissant $m \in$ (E). (On pourra se ramener à la situation du 5. a.)

En déduire une décomposition de T_2 en produit de transformations simples et retrouver géométriquement les résultats des questions 3. et 4.