Durée : 4 heures

Baccalauréat C Clermont-Ferrand septembre 1971

EXERCICE 1

Dans un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, on donne un cercle (C), de centre $\omega(2\,;\,0)$ et de rayon 2, et un cercle $\left(C'\right)$, de centre ω' situé sur $x'\text{O}x$, tel que $\omega'\omega = 6$ et de rayon 4. Soit I le centre d'homothétie directe de ces deux cercles.

1. Calculer $\overrightarrow{\text{OI}}$.
   Calculer la puissance de l'inversion de centre I transformant (C) en $\left(C'\right)$.
2. Soit (Γ) le cercle de centre $\gamma(0\,;\,b)$ et de rayon $|b|$. Ce cercle coupe (C) et $\left(C'\right)$ respectivement en A et en A$'$, distincts de l'origine. Montrer que la droite AA$'$ passe par I.

EXERCICE 2

Exprimer la distance d'un point, de coordonnées X, Y, aux droites (D) et $\left(D'\right)$ qui, dans un repère orthonormé d'axes Ox, Oy, ont respectivement pour équation

$$x+2y=0 \quad \text{et} \quad -2x+y=0.$$

Reconnaître et construire, dans ce même repère, la courbe (R) d'équation

$$(x+2y)(-2x+y)=5.$$

PROBLÈME

1. On considère l'équation en z, à coefficients complexes,

$$(1) \quad \left(16\text{tg}^2\theta\right)z^2 - 4(1+2\text{i}\,\text{tg}\,\theta)z - (\text{tg}\,\theta - \text{i})^2 = 0,$$

   où θ est un paramètre réel tel que

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$$

   a. Chercher les racines réelles de cette équation.
   Discuter. Montrer que dans tous les cas il y en a une, et une seule, r_0.

   b. Chercher toutes les racines de l'équation (1). Discuter.

2. Soit $z_0 = x+\text{i}y$ la racine, lorsqu'elle existe, complexe non réelle de l'équation (1).
   On lui fait correspondre, dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy, son point image M, de coordonnées x et y.
   Déterminer l'ensemble des points M images des nombres z_0, pour toutes les valeurs de θ appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,+\frac{\pi}{2}\right[$.
   Construire avec précision cet ensemble.

3. Soit, tracée dans le repère orthonormé de la question précédente, $(\mathscr{P})$ la parabole de représentation paramétrique suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{1}{4}\left(\operatorname{cotg}^2\theta - 1\right), \\ y & = & \dfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\theta, \end{array}\right. \qquad -\dfrac{\pi}{2} < \theta < +\dfrac{\pi}{2}$$

Soit A le sommet de cette parabole et (D) la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

a. Soit (Δ) une droite du plan, passant par A, et distincte de l'axe Ox et de la tangente au sommet de $(\mathscr{P})$. Soit m la pente de (Ll). La droite (Ll) recoupe $(\mathscr{P})$ en un point M, distinct de A ; exprimer, en fonction de m, les coordonnées de M.

Soit $\left(\Delta'\right)$ la perpendiculaire en A à la droite (Δ).

La droite $\left(\Delta'\right)$ recoupe aussi $(\mathscr{P})$ en un point M', distinct de A ; exprimer, en fonction de m, les coordonnées de M'.

b. Soit B la projection orthogonale de O sur (D) et H et H', respectivement, celles de M et de M' sur (D). Démontrer que le produit $\overline{\text{BH}}\cdot\overline{\text{BH}'}$ est indépendant de la position de la droite (Δ).

c. Démontrer géométriquement que les cercles circonscrits aux triangles OHH$'$ associés aux diverses positions de la droite (Δ) appartiennent un faisceau, dont on précisera la nature et les points remarquables. Quel est l'ensemble des centres de ces cercles ?

d. Calculer les coordonnées du point d'intersection, T, des tangentes à $(\mathscr{P})$ aux points M et M'.

Montrer que ce point est le centre du cercle circonscrit au triangle OHH$'$.

e. Retrouver ainsi que les cercles circonscrits aux triangles OHH$'$, associés aux diverses positions de la droite (Δ), appartiennent à un même faisceau.

4. Démontrer que la droite MM' passe par un point fixe I lorsque (Δ) varie.

Calculer le rapport $\dfrac{\text{I}M'}{\text{I}M}$ en fonction de m, puis en fonction de θ.

Pour quelles valeurs de m et de θ, ce rapport est-il égal à $\dfrac{1}{4}$? On calculera ces valeurs de θ à l'aide d'une table de logarithmes et l'on donnera le résultat en degrés, minutes et secondes. On construira les points M correspondants et l'on rectifiera alors, si nécessaire, le tracé de la parabole $(\mathscr{P})$.