Baccalauréat C Lille juin 1971

Le candidat doit traiter les DEUX EXERCICES et le PROBLÈME

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On considère la fonction numériqùe f d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, l'unité de longueur étant prise égale à 2 centimètres.
2. Calculer l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = \lambda + 1$ ($\lambda > 1$).
   Cette aire admet-elle une limite lorsque λ tend vers plus l'infini ?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit un triangle ABC de côtés AB $= 4a$, AC $= 5a$, BC $= 7a$ (a longueur donnée).

1. M étant un point quelconque de l'espace, donner une expression plus simple du vecteur $\overrightarrow{v_1} = 7\overrightarrow{M\text{A}} + 5\overrightarrow{M\text{B}} + 4\overrightarrow{M\text{C}}$, en utilisant la notion de barycentre.
2. Que peut-on dire du vecteur $2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}$ quand le point M varie ?
   Soit $\overrightarrow{v_2}$ ce vecteur.
3. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_1}$ aient le même module.

PROBLÈME **12 POINTS**

1. Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'axes $\overrightarrow{\text{O}x}$, $\overrightarrow{\text{O}y}$ on considère les cercles (C_1) et (C_2) d'équations respectives

$$\begin{array}{ll}(C_1) & x^2+y^2-2x+2y\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 0\\ (C_2) & x^2+y^2-2x-2y\sqrt{3}\end{array}$$

   Préciser leurs centres et leurs rayons.
   Quel est l'ensemble des centres des similitudes directes transformant (C_1) en (C_2) ?
2. À tout point M de coordonnées $x,\ y$ par rapport au repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, est associé son affixe $z = x + \text{i}y$.
   Soit M un point du cercle (C_1), z son affixe.
   On considère la similitude directe (S_{O}) de centre O, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   Quel est le transformé du cercle (C_1) dans cette similitude ?
   On désigne par z' l'affixe de M' homologue de M dans cette similitude. Exprimer z' en fonction de z.
   A étant le point (autre que O) commun aux cercles (C_1) et (C_2), montrer que les points M, M' et A sont alignés.

3. Calculer en fonction de z l'affixe ω du point Ω du plan, tel que le triangle $\Omega M' M$ soit rectangle isocèle et tel que $\left(\overrightarrow{\Omega M}\,,\,\overrightarrow{\Omega M'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Quel est l'ensemble (Γ) des points Ω quand M décrit le cercle (C_1) ?

Calculer les coordonnées de Ω en fonction de celles de M et trouver l'équation de (Γ).

4. M étant supposé fixe sur (C_1), Ω désignant le point qui lui a été associé dans 3., soit (R) la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Soit P un point quelconque du plan, P' son transformé par (S_O), P'' le transformé de P' par (R).

p, p', p'' désignent les affixes des points P, P' et P''. Exprimer p' en fonction de p ; p'' en fonction de p' et ω, enfin $p'' - z$ en fonction de $p - z$.

En déduire que la composée $(R) \circ (S_O)$ de (S_O) par R est une homothétie de centre M. Retrouver géométriquement ce résultat.