∽ Baccalauréat C Limoges juin 1971 ∾

EXERCICE 1

Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, on considère la loi de composition, notée $\star$, telle que

$$\forall (a\,;\,b) \in \mathbb{N}^2, \quad a \star b = a + b + a.b.$$

Les signes + et × désignent respectivement l'addition et la multiplication usuelles dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que c'est une loi interne dans $\mathbb{N}$, commutative et associative. Admet-elle un élément neutre ?
2. On définit $a^{(n)}$ pour $n \geqslant 1$ par

$$a^{(1)} = a \quad \text{et} \quad a^{(n)} = a(n-1) \star a.$$

Exprimer a^{0}, a^{0} et a^{0}, en fonction de a, et en déduire l'expression générale de $a^{(n)}$ en fonction de a et de n.

EXERCICE 2

On donne dans un plan orienté trois droites (D_1), (D_2) et (D_3) passant par O et telles que

$$(D_1,\, D_2) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{et} \quad (D_2,\, D_3) = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Soit $\mathscr{S}_{(D_1)}$, $\mathscr{S}_{(D_2)}$ et $\mathscr{S}_{(D_3)}$ les symétries par rapport aux droites (D_1), (D_2) et (D_3) [ou symétries axiales d'axes respectifs (D_1) (D_2) et (D_3)].

1. Construire le transformé d'un point M du plan par la transformation T définie par

$$T = \mathscr{S}_{(D_3)} \circ \mathscr{S}_{(D_2)} \circ \mathscr{S}_{(D_1)}$$

Quelle est la nature de cette transformation T ?
2. On considère alors la transformation T' définie par $T' = \mathscr{S}_{(D_1)} \circ T$.
Quelle est la nature de cette transformation T' ? Ce produit est-il commutatif ?

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$. Log x désigne le logarithme népérien de x. Sa base est e.

1. On considère l'équation différentielle

$$xy'\mathrm{Log}\,x + y - x = 0,$$

où y est la fonction inconnue de la variable x et y' sa dérivée par rapport à x. Trouver toutes les solutions de la forme $y = \dfrac{P(X)}{\mathrm{Log}\,x}$, où P désigne une fonction de x, que l'on déterminera. Préciser, parmi ces solutions, celle dont la courbe représentative passe par le point, S, de coordonnées (e ; e).

2. Étudier la fonction qui à x fait correspondre

$$y = \frac{x}{\operatorname{Log} x}.$$

On tracera la courbe représentative (Γ) par rapport aux axes $x'Ox$ et $y'Oy$.
On étudiera, en particulier, les branches infinies, les points remarquables et les tangentes en ces points.

3. On considère un point M_0 de (Γ) d'abscisse x_0. Déterminer les points M de (Γ) où les tangentes à (Γ) sont perpendiculaires à la tangente à (Γ) en M_0.
Discuter l'existence et le nombre de ces points M suivant les valeurs de x_0. (Il pourra être intéressant, afin d'alléger les écritures, de poser $u = \operatorname{Log} x$ et $u_0 = \operatorname{Log} x_0$.)
Lorsque x_0 est choisi dans un domaine précisé lors de la discussion précédente, il existe deux points M répondant à la question. Ils seront notés M_1 et M_2 d'abscisses respectives x_1 et x_2.
Montrer que

$$\operatorname{Log} x_1 + \operatorname{Log} x_2 = Log\operatorname{Log} x_1.\operatorname{Log} x_{2.}$$

En déduire que

$$\operatorname{tg}\left(\overrightarrow{Ox}\,,\,\overrightarrow{OM_1}\right) + \operatorname{tg}\left(\overrightarrow{Ox}\,,\,\overrightarrow{OM_2}\right) = 1.$$

4. Les tangentes en M_1 et M_2 à (Γ) coupent l'axe $x'Ox$ respectivement en P_1 et P_2 d'abscisses x'_1 et x'_2.
Montrer que $x'_1.x'_2 = x_1.x_2$.
On appelle m_2 la projection orthogonale sur $x'Ox$ de M_2. Démontrer que l'axe radical du cercle de diamètre M_1m_2 et du cercle circonscrit à $M_2P_1P_2$ passe par un point fixe lorsque M_0 varie sur (Γ) dans les conditions précisées à la question 3.
10 Construire le transformé d'un point M du plan par la transformation T définie par T = 9'<na) 0 9'(Do) 0 9'<n,)' Quelle est la nature de cette transformation T ? 20 On considère alors ia transformation T' définie par T' = 9'<n,) 0 T. Quelle est la nature de cette transformation T' ? Ce produit est-il commutatif ? III. - Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy. Log x désigne le logarithme népérien de x. Sa base est e. 10 On considère l'équation différentielle xy' Log x + y - x = 0, où y est la fonction inconnue de la variable x et yi sa dérivée par rapport à x. Trouver toutes les solutions de la forme y = LP(X) , où P désigne une fonction ogx de x, que l'on déterminera. Préciser, parmi ces solutions, celle dont la courbe représentative passe par le point, S, de coordonnées (e, e). . 20 Étudier la fonction qui à x fait correspondre x y = Logx' On tracera la courbe représentative (r) par rapport aux axes x'Ox et y'Oy. On étudiera, en particulier, les branches infinies, les points remarquables et les tangentes en ces points. 30 On considère un point Mo de (r) d'abscisse Xo' Déterminer les points M de (r) où les tangentes à (r) sont perpendiculaires à la tangente à (r) en Mo· Discuter l'existence et le nombre de ces points M suivant les valeurs de Xo' (Il pourra être intéressant, afin d'alléger les écritures, de poser u = Log x et Uo = Log xo·) Lorsque Xo est choisi dans un domaine précisé lors de la discussion précédente, il existe deux points M LIMOGES 27 répondant à la question. Ils seront notés Ml et M2 d'abscisses respectives Xl et x2 ? Montrer que Log Xl + Log X2 = Log Xl' Log x2 ? En déduire que
40 Les tangentes en Ml et M2 à (r) coupent l'axe x'Ox respectivement en Pl et P2 d'abscisses x et x . Montrer que x . x = Xl' x2 ? On apJlelle m2 la projection orthogonale sur x'Ox de M2 ? Démontrer que l'axe radical du cercle de diamètre M1m2 et du cercle circonscrit à M2P1P2 passe pur un point fixe lorsque Mo varie sur (r) dans les conditions précisées à la question 3°.