

## ∞ Baccalauréat C Montpellier juin 1971 ∞

### EXERCICE 1

Exprimer en fonction linéaire des sinus et cosinus de  $x$  et  $3x$  la fonction  $f$  de la variable  $x$  définie par

$$f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x.$$

En déduire l'expression de la primitive de cette fonction qui s'annule pour  $x = 0$ .

### EXERCICE 2

Soit  $z$  un nombre complexe. On considère le  $\frac{z+1}{z-1}$  nombre

$$Z = \frac{z+1}{z-1}.$$

Dans le plan complexe on désigne par  $M$  le point d'affixe  $z$ .

1. Déterminer l'ensemble (D) des points  $M$  tels que  $Z$  soit un nombre réel.
2. Déterminer l'ensemble (C) des points  $M$  tels que  $Z$  soit un imaginaire pur.
3. Déterminer l'ensemble (Γ) des points  $M$  tels que les points  $O$ ,  $M$  et  $P$  soient alignés. Le point  $P$  est le point d'affixe  $Z$  et  $O$  l'origine des axes de coordonnées.

### PROBLÈME

#### Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes  $x'Ox$  et  $y'Oy$ . Soit  $a$  un réel positif et  $\lambda$  un réel quelconque. On désigne par  $T_\lambda$  la transformation ponctuelle qui, à un point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$ , fait correspondre le point  $M'$  de coordonnées  $(x'; y')$  définies par

$$x' = \frac{ax}{(1-\lambda)y + a\lambda} \quad \text{et} \quad y' = \frac{ay}{(1-\lambda)y + a\lambda}.$$

1. Quelle est cette transformation pour  $\lambda = 1$  ?  
*Supposons  $\lambda \neq 1$ .*
  - a. Quels sont les points du plan qui n'ont pas de transformé ?
  - b. Déterminer les points invariants par cette transformation.
  - c. Montrer que la droite  $MM'$  joignant un point non invariant et son transformé passe par  $O$ .
2. Soit  $\lambda$  un réel quelconque. Déterminer la transformation produit  $T_{\lambda'} \circ T_\lambda$ , la transformation  $T_\lambda$  étant effectuée la première.  
L'ensemble des transformations  $T_\lambda$  lorsque  $\lambda$  parcourt  $\mathbb{R}$  est-il un groupe pour la loi  $\circ$  ?  
Déterminer  $\lambda$  pour que  $T_\lambda$  soit involutive.

#### Partie B

Dans la suite on suppose  $\lambda = -1$ .

1. Montrer que la transformée d'une droite (D) est une droite (D'). Cette droite peut-elle être parallèle à (D), ou confondue avec (D) ?
2. Déterminer les équations des cercles ( $\Gamma$ ) du plan qui sont globalement invariants dans la transformation. Quel est l'ensemble (ou lieu géométrique) des centres de ces cercles ?

Montrer que le cercle (C) de centre  $C\left(0 ; \frac{a}{2}\right)$  et de rayon  $\frac{a}{2}$  est orthogonal à tous les cercles invariants ( $\Gamma$ ). Quelle est la nature de la famille de ces cercles ( $\Gamma$ ) ?

Déterminer la courbe transformée du cercle (C) et la construire avec soin.