

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Orléans septembre 1971 ∞

EXERCICE 1

Déterminer la solution de l'équation différentielle

$$y' + 2y = 0$$

qui pour $x = \text{Log } 2$ prend la valeur 1.

Tracer la courbe représentative de la solution obtenue, par rapport à un repère orthonormé et calculer l'aire limitée par cette courbe, l'axe $x'x$, les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = X$, où X est un nombre supérieur à 0.

EXERCICE 2

Dans l'espace, les points A, B, C, I et J sont fixes; M étant un point quelconque, on construit les vecteurs \vec{V} , \vec{V}' et \vec{V}'' , tels que

$$\vec{V} = \vec{MA} - 3\vec{MB} + \vec{MC}, \quad \vec{V}' = \vec{MI} + \vec{MJ}, \quad \vec{V}'' = \vec{MI} - \vec{MJ}.$$

Déterminer l'ensemble (E') des points M , tels que $\vec{V} \cdot \vec{V}' = 0$ et l'ensemble (E'') des points M , tels que $\vec{V} \cdot \vec{V}'' = 0$.

PROBLÈME

1. a. x est un nombre réel donné. Pour quelles valeurs de x l'équation

$$y^2 - 2xy + 4x - 3 = 0,$$

dont y est l'inconnue, a-t-elle deux racines réelles y_1 et y_2 ? On appelle y_1 la plus grande des deux.

Étudier les variations de y_1 et de y_2 en fonction de x . Tracer, par rapport à un même repère, mais en les distinguant, les courbes représentatives (C_1) et (C_2) .

- b. On appelle (C) la réunion des courbes (C_1) et (C_2) . Démontrer qu'un point de coordonnées $(x; y)$ appartient à (C) si, et seulement si,

$$(x-2)^2 - (y-x)^2 = 1.$$

En déduire les points de (C) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2. Dans cette partie, m désigne un nombre complexe, z_1 et z_2 les racines complexes de l'équation

$$z^2 - 2mz + 4m - 3 = 0.$$

On considérera, dans un plan, le repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . Le nombre complexe $a + bi$ sera représenté par son image dans ce plan, qui est le point de coordonnées a et b . On appelle A, I et B les images respectives des nombres 1, 2 et 3, M l'image de m , M_1 et M_2 les images de z_1 et de z_2 .

- a.** i. Montrer que M est le milieu de $M_1 M_2$.
Pour quelles positions de M , les points M_1 et M_2 sont-ils confondus ?
- ii. Montrer que le produit $\overrightarrow{IM_1} \cdot \overrightarrow{IM_2}$ est constant et que l'axe \overrightarrow{Ou} est bissectrice de l'angle de $\overrightarrow{IM_1}$ et de $\overrightarrow{IM_2}$,
- b.** On appelle M' l'image du produit

$$z = \left(z_1 - \frac{3-i}{2} \right) \left(z_2 - \frac{3-i}{2} \right)$$

Montrer que l'on peut passer de M à M' par une similitude, dont on donnera les éléments.

Quel est, dans le cas où M décrit le cercle de centre O et de rayon 1, l'ensemble des points M' ?