Baccalauréat C Reims juin 1971

EXERCICE 1

1. Calculer la dérivée de la fonction f qui, à x supérieur à 1, fait correspondre

$$f(x) = \text{Log}\,(\text{Log}\, x),$$

où Log désigne le logarithme népérien.

2. Établir les inégalités suivantes :

$$0 < \text{Log}\,[\text{Log}\,(k+1)] - \text{Log}\,[\text{Log}\, k] < k\text{Log}\, k$$

pour tout k entier supérieur ou égal à 2, en appliquant le théorème des accroissements finis à f entre k et $(k+1)$.

3. On pose

$$S_n = \frac{1}{2\text{Log}\,2} + \frac{1}{3\text{Log}\,3} + \ldots + \frac{1}{n\text{Log}\,n}$$

Utilisant la question 2, établir que $S_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

EXERCICE 2

1. Établir que $\left(24n^2 + 8n\right)$ est divisible par 16, quel que soit l'entier n positif ou nul.
En déduire que $(2n+1)^4$ est congru à 1 modulo 16.
2. Montrer que, si a est un entier positif ou nul, a^4 est congru à 1 ou à 0, modulo 16.
En déduire que, si le nombre $16n + 15$ (n entier positif ou nul) est mis sous forme d'une somme de k puissances quatrièmes d'entiers ; soit

$$16n + 15 = x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_k^4,$$

alors, nécessairement, il faut $k \geqslant 15$.

PROBLÈME

(P) est un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; soit Ox et Oy les axes associés.
Dans (P) on donne les points A$(d\,;\,0)$ et B$(-d\,;\,0)$, d étant un nombre réel strictement positif.
Dans tout le problème, k et α sont deux nombres réels qui satisfont aux conditions générales

$$k > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < +\frac{\pi}{2}$$

et éventuellement à des conditions supplémentaires, qui seront précisées par l'énoncé.

Partie A

Au couple $(k\ ;\ \alpha)$ on fait correspondre le point m de (P) dont les coordonnées sont

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l c l} x &=& d\dfrac{1-k}{1+k}\\ y &=& d\text{tg}\dfrac{\alpha}{2}.\end{array}\right.$$

1. Montrer que m appartient à l'intérieur (I) d'un carré, défini par

$$-d < x < d \quad \text{et} \quad -d < y < d.$$

2. Réciproquement, montrer que, m étant donné dans (I), les formules (1) lui font correspondre un couple $(k\ ;\ \alpha)$ unique.
Quel couple correspond au point O de (P) ?

Partie B

1. Déterminer l'équation du cercle (C), ensemble des points M de (P) tels que $\dfrac{M\text{A}}{M\text{B}} = k$ (k donné différent de 1).
Déterminer l'équation du cercle (Γ), ensemble des points M de (P) tels que $(M\text{A}, M\text{B}) \equiv \alpha$ [modulo π] (α donné différent de 0).
(On pourra exprimer $\text{tg}\,\alpha$ en fonction de x, y et d. On trouvera l'équation de (Γ) :

$$x^2 + y^2 + 2dy\text{cotg}\,\alpha - d^2 = 0.)$$

2. Soit (E) la région extérieure du disque limité par le cercle de diamètre AB, c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $\text{O}M > d$.
Montrer géométriquement qu'à tout couple $(k\ ;\ \alpha)$ distinct du couple $(+1\ ;\ 0)$ correspond un point M de (E) et un seul tel qu'on ait simultanément

$$\frac{M\text{A}}{M\text{B}} = k, \qquad (M\text{A}, M\text{B}) \equiv \alpha[\text{modulo}\,\pi].$$

Partie C

On appelle (I$'$) l'intérieur, privé du point O, du carré défini à la partie A, question 1. et l'on considère l'application f de (I$'$) dans (E) qui à m associe M de la façon suivante : au point m on fait correspondre le couple $(k\ ;\ \alpha)$, défini à la partie A, question 2, et à ce couple $(k\ ;\ \alpha)$ on fait correspondre M défini à la partie B, question 2. [Ainsi, à tout point m de (I$'$) correspond par f un point M de (E).]
Soit D le point dont les coordonnées sont $(d\ ;\ d)$ et D$'$ le point dont les coordonnées sont $(-d\ ;\ -d)$.
On désigne par (ℓ) le segment DD$'$ privé des points D, D$'$ et O.
On se propose de chercher la transformée (L) de (ℓ) par f.

1. Montrer que pour tout point m de (ℓ) on a

$$k = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

2. Montrer que le cercle (C) [défini à la partie B, question 1.] a alors pour équation, en fonction de α,

$$(C) \qquad x^2 + y^2 - \frac{2d}{\sin\alpha}x + d^2 = 0.$$

3. Calculer les coordonnées des points communs aux cercles (C) et (Γ). (Γ) étant le cercle dont l'équation a été trouvée à la partie B, question 1.,

$$(\Gamma) \quad x^2 + y^2 + 2dy\,\mathrm{cotg}\,\alpha - d^2 = 0.$$

Préciser celui des deux points communs qui appartient à (E).

4. Vérifier que (L) est une partie de la courbe dont l'équation est

$$x^2 - y^2 = d^2.$$

Préciser de quelle partie il s'agit et la représenter dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.