Baccalauréat C Strasbourg juin 1971

EXERCICE 1

Soit le plan rapporté à un repère orthonormé, les axes de coordonnées étant désignés par $x'Ox$ et $y'Oy$. On appelle (Δ) la droite d'équation $x = 6$, H la projection orthogonale du point M sur la droite (Δ).

1. Soit l'ellipse (E) de foyer O de directrice (Δ), ensemble des points M du plan tels que

$$(1) \qquad 2\text{OM} = \text{MH}.$$

Former son équation cartésienne.

2. Un axe $t'Ot$ du plan, repéré par son angle polaire $\left(\overrightarrow{Ox}\,,\ \overrightarrow{Ot}\right) = \theta \pmod{2\pi}$, coupe la droite (Δ) en P et la courbe (E) en deux points M et M$'$) dont les abscisses sur l'axe Ot sont OM et OM'.

On choisit $\overline{\text{OM}} > 0 > \overline{\text{OM}'}$ et l'on sait que

$$\overrightarrow{\text{OM}} + \overrightarrow{\text{MH}} = \overrightarrow{\text{OH}}\,;$$

en utilisant une projection sur l'axe $x'Ox$ et la relation (1), calculer $\overline{\text{OM}}$ en fonction de θ.

Sans nouveaux calculs, démontrer que

$$\overline{\text{OM}'} = \frac{-6}{2-\cos\theta}.$$

3. Démontrer que

$$\frac{1}{\overline{\text{OM}}} + \frac{1}{\overline{\text{OM}'}} = \frac{2}{\overline{\text{OP}}},$$

que peut-on en conclure ?

EXERCICE 2

On définit la suite de terme général v_n de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 1, \\ v_{n+1} & = & \sqrt{12+v_n}, \text{pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, v_n est un nombre réel strictement positif et strictement inférieur à 4.

2. On pose $4 - v_n = w_n$. Démontrer que

$$w_{n+1} < \frac{1}{4} w_n\,;$$

en déduire la limite de w_n, puis celle de v_n lorsque n tend vers l'infini.

N. B. - On attachera une importance particulière à la clarté de la rédaction du raisonnement par récurrence.

PROBLÈME

Dans tout le problème, x désigne un nombre réel strictement positif et Log x le logarithme népérien de x (on rappelle que Log e = 1).
À tout nombre réel k on associe l'application de l'ensemble des nombres réels strictement positifs dans l'ensemble des nombres réels, définie par

$$f_k(x) = \frac{\text{Log}\,x}{x} - \frac{k}{x}.$$

On appelle (C_k) la courbe représentative de f_k dans un repère orthonormé, les axes de coordonnées étant désignés par $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.

1. **a.** Étudier les variations de f_1 et tracer la courbe (C_1), correspondant à $k = 1$.

   b. Étudier les variations de f_k ; déterminer la limite de $f_k(x)$ lorsque x tend vers zéro par valeurs positives et la limite de $f_k(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$.

   L'application f_k est-elle injective ; est-elle surjective ?

2. **a.** On appelle T_k le point de contact de (C_k) et de la tangente à (C_k) issue de O. Calculer, en fonction de k, l'abscisse t_k de T_k ?

   Quel est l'ensemble des points T_k lorsque k varie dans l'ensemble des nombres réels ?

   b. On appelle P_k le point de (C_k) d'ordonnée nulle, M_k le point de (C_k) où la tangente à (C_k) est parallèle à $x'\text{O}x$ et I_k le point de (C_k) dont l'abscisse annule la dérivée seconde de f_k. Calculer, en fonction de k, les abscisses respectives p_k, m_k et i_k de P_k, M_k et I_k.

   Montrer que p_k, m_k, i_k sont les quatre premiers termes d'une suite géométrique ; on notera $u_n(k)$ le terme de rang $(n+1)$ de cette suite.

   c. Calculer la somme des n premiers termes de cette suite géométrique. Cette somme a-t-elle une limite lorsque n tend vers $+\infty$?

3. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g définie par

$$g(x) = (\text{Log}\,x)^2.$$

   En déduire une primitive de f_k et calculer l'aire $\mathcal{A}_n$ de la surface comprise entre l'axe $x'\text{O}x$, la courbe (C_k) et les droites d'équations respectives $x = u_n(k)$ et $x = u_{n+1}(k)$, où $u_n(k)$ a la même signification qu'au 2. b.

   Constater que $\mathcal{A}_n$ ne dépend pas de k et que la suite qui, à tout entier naturel n, fait correspondre $\mathcal{A}_n$ est arithmétique.

4. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis pour une primitive de f_1 sur l'intervalle $[\text{e}~;~x]$ et l'étude des variations de f_1, que, pour tout x strictement supérieur à e, on a

$$(\text{e}\text{Log}\,x - \text{e})^2 < 2(x - \text{e}).$$